Acad. GHEORGHE MIHOC ILEANA NĂDEJDE

PROGRAMAREA matematică

PROGRAMAREA STOCHASTICĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Acad. Gheorghe Mihoc

Ileana Nădejde

PROGRAMAREA MATEMATICĂ

■ ■

PROGRAMAREA STOCHASTICĂ

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Organizarea științifică a producției și a muncii, care stă astăzi în centrul preocupărilor tuturor cadrelor din economie, se folosește tot mai mult de metodele matematicii moderne. Dezvoltarea economiei pornește de la principiul că orice decizie referitoare la activitatea economică și tehnică să fie astfel luată încît să permită realizarea obiectivelor urmărite în condiții optime.

Experiența în muncă și intuiția conduc uneori la alegerea mijloacelor și metodelor celor mai adecvate pentru realizarea unui anumit obiectiv. În măsura în care crește complexitatea problemelor urmărite, experiența și intuiția devin insuficiente pentru o alegere judicioasă a celei mai bune soluții. Totodată se creează mijloace de investigație care pot să țină seamă, în mod organizat, de tot mai multe dintre aspectele problemei și de deciziile posibile. Analiza condițiilor în care se desfășoară un proces conduce de obicei la crearea unor modele care își găsesc o expresie matematică.

Modelul unui proces poate fi deterministic sau stochastic (probabilistic). Aceste clase de modele nu diferă ca formă, dar se deosebesc din punctul de vedere al informațiilor pe care le conțin și le pot oferi, precum și din punctul de vedere al interpretării rezultatelor care se obțin cu ajutorul lor.

Un model este deterministic dacă parametri care caracterizează procesul modelat sînt cunoscuți cu precizia necesară pentru a garanta valabilitatea rezultatelor, iar construcția modelului nu conține nici un factor aleator. În cele mai multe cazuri, parametri unui model deterministic sînt valorile medii ale unor variabile aleatoare. De exemplu, dacă ne referim la productivitatea unui utilaj și acceptăm că aceasta este de k *unități pe oră, numărul* k *reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare care este producția utilajului în cursul unui an. De asemenea, dacă într-un model matematic considerăm că* b *este cantitatea de produse de un anumit sort cerută pe piață, această mărime reprezintă în fond o medie a cererii. Desigur că există cazuri în care parametri modelului sînt constante determinate, de exemplu, conținutul de principii nutritive ale unui anumit aliment, cantitățile de materii prime necesare pentru a obține un anumit produs etc.*

Scanned with OKEN Scanner

În modelele deterministice dispunem de variabile de decizie care pot lua valori în domeniul determinat de restricțiile modelului. Decizia adoptată este programul care satisface restricțiile problemei și corespunde criteriului de optimalitate ales, exprimat prin funcția obiectiv.

În modelele stochastice unii dintre parametri sau, în cazul general, toți parametri sînt variabile aleatoare care nu pot fi înlocuite prin valorile medii fie pentru că aceste valori nu sînt cunoscute, fie pentru că înlocuirea lor ar face ca informațiile obținute prin rezolvarea modelului să se îndepărteze de realitate. În aceste cazuri, deciziile care trebuie luate depind de variabilele aleatoare din model.

Se poate admite că repartiția variabilelor aleatoare, care constituie parametri unui model, nu este cunoscută. Astfel de probleme sînt tratate în programarea matematică sub denumirea de „incertitudini" și se ivesc în practică atunci cînd procesul modelat se experimentează pentru prima oară sau s-a experimentat de prea puține ori. Dacă dispunem de informații suficiente numai asupra unora dintre operațiile incluse în model, astfel încît se cunosc numai repartițiile unora dintre variabilele aleatoare implicate, modelul se încadrează în cazurile de „incertitudini parțiale". În sfîrșit, dacă se cunosc repartițiile tuturor variabilelor aleatoare care ne interesează, ne găsim, după o nomenclatură modernă, în fața unei probleme de „programare stochastică", deși sub acest nume ar trebui să fie cuprinse toate programările care conțin elemente aleatoare.

Deosebirea dintre programarea stochastică și cea cu incertitudini este analogă cu deosebirea dintre statistica matematică subparametrică și cea parametrică.

Pînă în prezent studiile care au ca obiect programarea probabilistică, concretizate în articole apărute în diferite reviste de specialitate, nu au fost sistematizate sub forma unui tratat. În lucrarea de față autorii și-au propus să prezinte, sub o formă organizată, principalele rezultate obținute în domeniul programării stochastice, lăsînd deocamdată de o parte programarea cu incertitudini totale și parțiale, precum și „programul cu restricții de șansă". Sub ultima titulatură sînt studiate problemele în care restricțiile $Ax \leqslant b$ *sînt înlocuite prin condițiile* $P(Ax \leqslant b) \leqslant \alpha$ *unde cu* P *notăm probabilitatea, iar* α *este un vector coloană cu* m *elemente, dacă* A *este o matrice cu* m *linii. Componentele vectorului* α *satisfac evident condițiile* $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$. *Cu alte cuvinte, în programele cu restricții de șansă se admite ca deciziile să violeze restricțiile, vectorul* α *specificînd măsura probabilității domeniului în care nu este admisă nerespectarea restricțiilor. Conceptul programării cu restricții de șansă apare în literatura de specialitate pentru prima dată în articolul „Chance Constrained Programming", publicat în „Managment Science", vol. 6, nr. 1, 1959, semnat de A. Charnes și W. Cooper.*

Scanned with OKEN Scanner

Această idee este dezvoltată ulterior de A. Madansky, Y. K. Sengupta etc.

În lucrarea de față programarea stochastică este sistematizată în două capitole.

Capitolul I intitulat „Programe stochastice" se ocupă de problemele de programare liniară în care variabilele aleatoare constituie fie coeficienții funcției obiectiv, deci vectorul c *al „costurilor", fie coeficienții sistemului de restricții al problemei. În acest caz se analizează situațiile în care este aleator numai vectorul* b *al „cererii" sau al „disponibilului", situațiile în care numai coeficienții matricei tehnologice* A *sînt aleatori, precum și cele în care atît* A, *cît și* b *conțin elemente aleatoare. În cadrul aceluiași capitol se discută și problema generală a programării stochastice în care toți coeficienții modelului sînt variabile aleatoare.*

Capitolul II intitulat „Transporturi stochastice" include problemele de transport cu costuri aleatoare și pe cele cu cereri aleatoare, probleme al căror aspect practic este evident.

Capitolul III, intitulat „Programare în lanțuri Markov" conține pe lîngă problema enunțată în titlu și o expunere asupra lanțurilor Markov finite și lanțurilor cu legături complete finite, expunere menită să înlesnească lectura.

Cu toate că metoda PERT ar putea fi considerată ca aparținînd programării stochastice, autorii cărții de față au privit-o ca fiind situată la granița dintre programarea cu incertitudini și programarea stochastică și, în consecință, nu au inclus-o în această lucrare.

Contribuția matematicienilor români la studiul programării stochastice este pusă în valoare în toate capitolele acestei lucrări.

Cartea se adresează atît matematicienilor, cît și inginerilor și economiștilor care se ocupă cu probleme de programare. Din punct de vedere matematic, lectura cărții necesită cunoștințe de analiză matematică, teorie a probabilităților și statistică matematică, la nivelul la care aceste discipline sînt predate în institutele tehnice. Numărul mare de exemple care însoțesc expunerea au scopul de a veni în sprijinul cititorilor cu o pregătire mai puțin fundamentată.

Volumul I al Programării Matematice, semnat de aceiași autori tratează problemele de programare deterministică, necesare înțelegerii lucrării de față.

Pe această cale mulțumim tov. C. Bergthaller, cercetător la Centrul de statistică matematică al Academiei Republicii Socialiste România, pentru citirea atentă a întregului manuscris și pentru prețioasele sale observații, de care am ținut seama la redactarea definitivă a lucrării.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

PROGRAME STOCHASTICE

§ 1. CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE UNUI SISTEM DE INECUAȚII LINIARE

Fie dat un sistem de inecuații liniare:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\geqslant b_i && i \in I = \{1, \ldots, m\} \\ x_j &\geqslant 0 && j \in J = \{1, \ldots, n\} \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

Să admitem că mărimile a_{ij}, b_i $i \in I$; $j \in J$ pot lua orice valori în intervale determinate și finite, deci

$$\begin{aligned} -\infty < a_{ij}^- \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^+ < +\infty && \text{pentru orice } i \in I \text{ și } j \in J \\ -\infty < b_i^- \leqslant b_i \leqslant b_i^+ < +\infty && \text{pentru orice } i \in I. \end{aligned} \tag{I. 1.2}$$

În aceste condiții se poate demonstra

Teorema I. Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații liniare

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij}^- x_j &\geqslant b_i^+ && i \in I \\ x_j &\geqslant 0 && j \in J \end{aligned} \tag{I.1.3}$$

este inclusă în mulțimea soluțiilor sistemului:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij}x_j &\geqslant b_i && i \in I \\ x_j &\geqslant 0 && j \in J \end{aligned} \tag{I.1.4}$$

în care $a_{ij} \in [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ și $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$. De asemenea, mulțimea soluțiilor acestui sistem este inclusă în mulțimea soluțiilor sistemului:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij}^+ x_j &\geqslant b_i^- && i \in I \\ x_j &\geqslant 0 && j \in J. \end{aligned} \tag{I.1.5}$$

Cu alte cuvinte, orice soluție x^* a sistemului (I.1.3) satisface sistemul (I.1.4) și orice soluție x^{**} pentru (I.1.4) verifică sistemul (I.1.5).

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ o soluție a sistemului (I.1.3) adică:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} a_{ij}^- x_j^* &\geqslant b_j^* \qquad i \in I \\ x_j^* &\geqslant 0 \qquad j \in J \end{aligned} \tag{I.1.6}$$

Deoarece $a_{ij} \in [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ se poate afirma că

$$a_{ij} \geqslant a_{ij}^- \text{ pentru toți } i \in I \text{ și } j \in J. \tag{I.1.7}$$

Înmulțind ambii membri ai acestor inegalități cu numerele nenegative x_j^* și însumînd, avem

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j^* \geqslant \sum_{j\in J} a_{ij}^- x_j^*; \qquad i \in I. \tag{I.1.8}$$

Pe de altă parte, deoarece $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$ pentru orice $i \in I$, avem

$$-b_i \geqslant -b_i^+ \tag{I.1.9}$$

Din (I.1.8) și (I.1.9) rezultă că

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j^* - b_i \geqslant \sum_{j\in J} a_{ij}^- x_j^* - b_i^+; \qquad i \in I \tag{I.1.10}$$

sau, în baza condiției (I.1.6)

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j^* - b_i \geqslant 0; \qquad i \in I$$

și deci

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j^* \geqslant b_i; \qquad i \in I$$

ceea ce dovedește că orice soluție a sistemului (I.1.3) este o soluție și pentru (I.1.4).

De asemenea, fie $x^{**} = (x_1^{**}, \ldots, x_n^{**})$ o soluție a sistemului (I.1.4). Inegalitățile

$$a_{ij}^+ \geqslant a_{ij}; \qquad i \in I, \; j \in J \tag{I.1.11}$$

înmulțite cu x_j^{**} și însumate, conduc la inegalitatea

$$\sum_{j\in J} a_{ij}^+ x_j^{**} \geqslant \sum_{j\in J} a_{ij} x_j^{**}; \qquad i \in I \tag{I.1.12}$$

Condițiile impuse mărimilor b_i justifică inegalitățile

$$-b_i^- \geqslant -b_i; \qquad i \in I. \tag{I.1.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile (I.1.12) şi (I.1.13) rezultă că

$$\sum_{j\in J} a_{ij}^{+} x_j^{**} - b_i^{-} \geqslant \sum_{j\in J} a_{ij} x_j^{**} - b_i \; ; \qquad i \in I. \qquad \text{(I.1.14)}$$

Deoarece x^{**} este o soluţie a sistemului (I.1.4) inegalitatea (I.1.14) conduce la relaţia

$$\sum_{j\in J} a_{ij}^{+} x_j^{**} \geqslant b_i^{-} \; ; \qquad i \in I$$

care dovedeşte că x^{**} satisface sistemul (I.1.5).

Să verificăm cu ajutorul unui exemplu rezultatele stabilite prin teorema I.

Exemplul I. Fie dat sistemul de inecuaţii liniare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\geqslant b_3 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

unde

$$a_{11} \in [1,3];\ a_{12} \in [1,\ 2];\ a_{21} \in [1,5\ ;3];\ a_{22} \in [-1,1];\ a_{31} \in$$
$$\in [-2,1]\, a_{32} \in [2,\ 4];\ b_1 \in [2,4];\ b_2 \in [2,3];\ b_3 [0,2].$$

Considerăm sistemul în care a_{ij}; $i = 1,2,3$; $j = 1,2$ iau valori egale cu marginile lor inferioare şi b_i; $i = 1,\ 2$ iau valori egale cu marginile lor superioare

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\geqslant 4 \\ 1{,}5x_1 - \ x_2 &\geqslant 3 \\ -2x_1 + 2x_2 &\geqslant 2 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Mulţimea soluţiilor acestui sistem este domeniul NCS din fig. 1.

Sistemul în care se atribuie mărimilor a_{ij} valori egale cu marginile lor superioare şi mărimilor b_i valori egale cu marginile lor inferioare este

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 2 \\ 3x_1 + \ x_2 &\geqslant 2 \\ x_1 + 4x_2 &\geqslant 0 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Deoarece restricţia a treia din acest sistem este evident satisfăcută de orice $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ nu se mai reprezintă dreapta $x_1 +$

Scanned with OKEN Scanner

$+ 4x_2 = 0$, iar mulțimea soluțiilor sistemului, în fig. 1, este domeniul MEFR.

Să considerăm acum un sistem în care fiecare dintre mărimile a_{ij} iau cîte o valoare oarecare din intervalul căruia îi aparțin, de exemplu, sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 3{,}8 \\ 2{,}5x_1 + 0.x_2 &\geqslant 2{,}5 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 &\geqslant 0 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

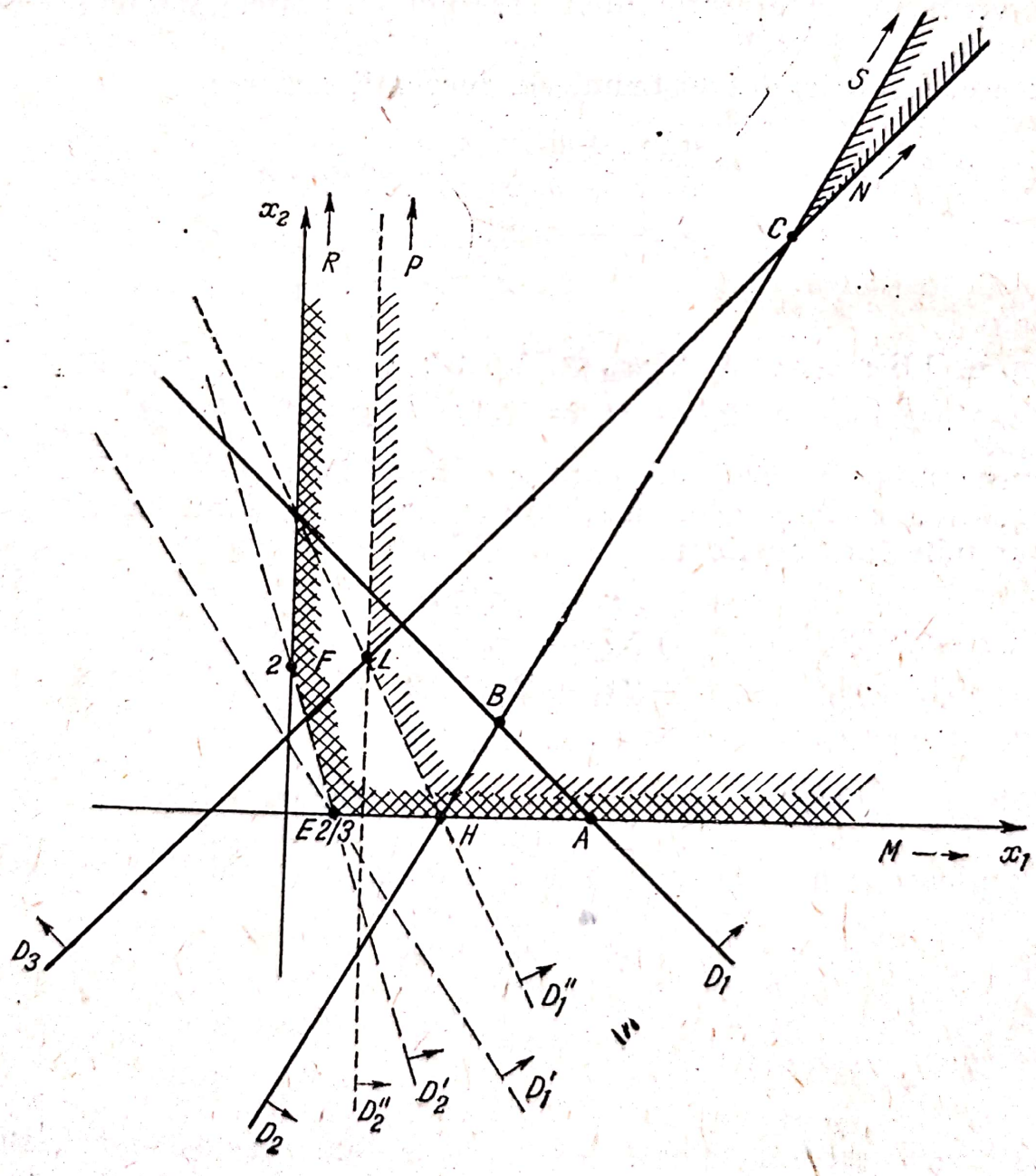

Fig. 1

Deoarece a treia inecuaţie este echivalentă cu condiţia de nenegativitate a variabilei x_2, în fig. 1 s-au reprezentat numai dreptele $2x_1 + x_2 = 3{,}8$ şi $x_1 = 1$. Mulţimea soluţiilor acestui sistem este domeniul MHLP. Se observă cu uşurinţă că

$$(\text{NCS}) \subset (\text{MHLP}) \subset (\text{MEFR}).$$

Revenind la forma generală, notăm cu

$$\begin{aligned} Ax &\geqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

un sistem de inecuaţii liniare în care

$A = (a_{ij})$; $i \in I$, $j \in J$ este o matrice $m \times n$ dimensională

$b = (b_i)$; $i \in I$ o matrice $m \times 1$

$x = x_j$; $j \in J$ un vector coloană cu n componente.

Fie $\mathcal{D}$ mulţimea soluţiilor acestui sistem.

Se admite că elementele matricelor A şi b satisfac condiţiile

$$-\infty < a_{ij}^- \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^+ < +\infty ; \qquad -\infty < b_i^- \leqslant b_i \leqslant b_i^+ < +\infty ;$$

$$i \in I,\ j \in J.$$

Se notează cu

$$A^- = (a_{ij}^-) ;\ A^+ = (a_{ij}^+) ;\ b^- = (b_i^-) ;\ b^+ = (b_i^+) ; \qquad i \in I ;\ j \in J.$$

Fie ${}^-\mathcal{D}^+$ mulţimea soluţiilor sistemului de inecuaţii liniare

$$\begin{aligned} A^- x &\geqslant b^+ \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

şi ${}^+\mathcal{D}^-$ mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{aligned} A^+ x &\geqslant b^-. \\ x &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Cu aceste notaţii, afirmaţiile teoremei I se pot scrie astfel :

$$-\mathcal{D}^+ \subset \mathcal{D} \subset {}^+\mathcal{D}^- \qquad \text{(I.1.15)}$$

Menţinînd aceleaşi notaţii se poate demonstra cu uşurinţă

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II. Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații liniare

$$A^- x \leqslant b^+ \qquad x \geqslant 0 \tag{I.1.16}$$

include mulțimea soluțiilor sistemului

$$Ax \leqslant b \qquad x \geqslant 0 \tag{I.1.17}$$

iar această mulțime include, la rîndul ei, mulțimea soluțiilor sistemului

$$A^+ x \leqslant b^- \qquad x \geqslant 0 \tag{I.1.18}$$

adică, dacă se notează cu ${}^-\mathrm{D}^+$, D și ${}^+\mathrm{D}^-$ mulțimile soluțiilor sistemelor (I.1.16), (I.1.17) și (I.1.18), atunci

$${}^+\mathrm{D}^- \subset \mathrm{D} \subset {}^-\mathrm{D}^+ \tag{I.1.19}$$

Demonstrație. Fie x^* un element al mulțimii D, adică

$$x^* \geqslant 0 \qquad \text{și} \qquad Ax^* \leqslant b \tag{I.1.20}$$

Deoarece $a_{ij}^- \leqslant a_{ij}$; $i \in I$ și $j \in J$ convenim să notăm

$$A^- \leqslant A$$

înțelegînd prin aceasta că toate elementele matricei A^- sînt mai mici decît elementele corespunzătoare ale matricei A. Matricea $A^- - A$ are toate elementele negative, deci produsul acestei matrice prin vectorul nenegativ x^* este un vector nepozitiv, adică

$$(A^- - A)x^* \leqslant 0$$

sau

$$A^- x^* \leqslant Ax^* \tag{I.1.21}$$

Deoarece, avem de asemenea

$$-b^+ \leqslant -b \tag{I.1.22}$$

din (I.1.21) și (I.1.22) rezultă că

$$A^- x^* - b^+ \leqslant Ax^* - b$$

sau ținînd seamă de inegalitatea (I.1.20) se poate scrie că

$$A^- x^* \leqslant b^+$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce dovedește că orice element x^* din D aparține și mulțimii $^{-}D^{+}$, deci că

$$D \subset {}^{-}D^{+}.$$

Pentru a demonstra prima relație de incluziune din teorema II notăm cu x_* un element din $^{+}D^{-}$, deci

$$A^{+}x_* \leqslant b^{-}, \qquad x_* \geqslant 0.$$

Deoarece matricea $A - A^{+}$ are toate elementele nepozitive, avem

$$(A - A^{+})x_* \leqslant 0$$

sau

$$Ax_* \leqslant A^{+}x_*. \tag{I.1.23}$$

Pe de altă parte, se poate scrie că

$$-b \leqslant -b^{-}. \tag{I.1.24}$$

Din inegalitățile (I.1.23) și (I.1.24) rezultă că

$$Ax_* - b \leqslant A^{+}x_* - b^{-} \tag{I.1.25}$$

și deci

$$Ax_* \leqslant b.$$

Această relație dovedește că orice element din mulțimea $^{+}D^{-}$ aparține și mulțimii D adică

$$^{+}D^{-} \subset D.$$

Să considerăm acum următoarea problemă de programare liniară:

Să se determine

$$f = \min cx$$

pe mulțimea soluțiilor sistemului de restricții

$$Ax \geqslant b; \qquad x \geqslant 0.$$

A, b și c sînt matrice de dimensiuni $m \times n$; $m \times 1$, respectiv $1 \times n$ ale căror elemente sînt mărginite superior și inferior, adică

$$a_{ij}^{-} \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^{+}; \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \; j \in J = \{1, \ldots, n\}$$

$$b_i^{-} \leqslant b_i \leqslant b_i^{+}; \quad i \in I$$

$$c_j^{-} \leqslant c_j \leqslant c_j^{+}; \quad j \in J.$$

Scanned with OKEN Scanner

Convenim ca, în aceste condiții, să scriem

$$A^- \leqslant A \leqslant A^+; \quad b^- \leqslant b \leqslant b^+; \quad c^- \leqslant c \leqslant c^+.$$

În acest caz se dovedește

Teorema III. Dacă există

$$\begin{aligned} f^- &= \{\min c^- x | A^+ x \geqslant b^-; \quad x \geqslant 0\} \\ f &= \{\min cx \mid Ax \geqslant b; \quad x \geqslant 0\} \\ f^+ &= \{\min c^+ x \mid A^- x \geqslant b; x \geqslant 0\} \end{aligned} \tag{I.1.26}$$

atunci

$$f^- \leqslant f \leqslant f^+ \tag{I.1.27}$$

De asemenea, dacă există

$$\begin{aligned} \varphi^- &= \{\max c^- x \mid A^+ x \leqslant b^-; \quad x \geqslant 0\} \\ \varphi &= \{\max cx \mid Ax \leqslant b; \quad x \geqslant 0\} \\ \varphi^+ &= \{\max c^+ x \mid A^- x \leqslant b^+; \quad x \geqslant 0\} \end{aligned} \tag{I.1.28}$$

atunci

$$\varphi^- \leqslant \varphi \leqslant \varphi^+ \tag{I.1.29}$$

Demonstrație. Pentru a stabili inegalitatea

$$f^- \leqslant f$$

se mai consideră problema

$$f_1 = \{\min c^- x \mid Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0\} \tag{I.1.30}$$

Dacă f_1 este finit se poate afirma că

$$f^- \leqslant f_1 \tag{I.1.31}$$

deoarece, din teorema I, se știe că $\mathcal{D} \subset {}^+\mathcal{D}^-$.

Deoarece $c^- < c$, pentru orice $x \geqslant 0$, avem $c^- x \leqslant cx$ și deci se poate afirma că

$$f_1 \leqslant f. \tag{I.1.32}$$

Inegalitățile (I.1.31 și (I.1.32) justifică prima inegalitate din (I.1.27).

Pentru demonstrarea inegalității

$$f \leqslant f^+$$

se consideră problema

$$f_2 = \{\min c^+ x \mid Ax \geqslant b; \quad x \geqslant 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece, $c \leqslant c^+$, pentru orice $x \geqslant 0$, avem $cx \leqslant c^+x$ deci și

$$f \leqslant f_2. \tag{I.1.33}$$

Pe de altă parte, din teorema I se știe că

$$\bar{\mathcal{D}}^+ \subset \mathcal{D}$$

de unde rezultă că

$$f_2 \leqslant f^+. \tag{I.1.34}$$

În sfîrșit, inegalitățile (I.1.33) și (I.1.34) stabilesc a doua relație din (I.1.27). Inegalitățile (I.1.29) se demonstrează analog.

Vom ilustra printr-un exemplu afirmațiile teoremei III.

Exemplul II. Un atelier mecanic folosește două mașini-unelte M_1 și M_2 pentru executarea a trei tipuri de piese P_1 P_2 P_3. Planificarea trebuie făcută astfel încît beneficiul realizat prin utilizarea acestor mașini să fie maxim. În momentul în care se face planificarea se știe că cele două mașini-unelte au fiecare un disponibil de 300 de ore sau prima are un disponibil de 300 și a doua de 500 de ore în perioada de timp studiată. Piesele pot fi confecționate din materia primă A_1, A_2, A_3 sau A_4 pentru care indicii de utilizare a mașinilor sînt diferiți. Se știe că acești indici sînt:

(1)

Pentru piese tip	P_1				P_2				P_3			
Materia primă / Mașina	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4
M_1	3	2,5	2,3	1,5	5	4	2	2	4	3	2	1
M_2	2	1,8	1,5	1	3	3	2	1	6	5	4	3

Beneficiul care se poate obține pentru o piesă din fiecare tip este de respectiv 1; 3; 2 unități bănești sau de 3; 4; 3 unități bănești. În momentul cînd se face planificarea nu se știe care este materia primă de care va dispune atelierul și nici nu se poate preciza dacă beneficiile sînt cele din prima grupă sau din cea de a doua. Dacă întreprinderea dorește să afle între ce limite poate fi cuprins beneficiul optim, se pot rezolva două probleme de programare liniară pe care să le denumim varianta pesimistă și varianta optimistă.

În varianta pesimistă se presupune că materia primă de care vom dispune este A_1 care implică folosirea mașinilor cu cei mai mari coeficienți de utilizare, că mașinile vor dispune în perioada studiată

Scanned with OKEN Scanner

de cel mai mic număr de ore și că beneficiile care se vor putea realiza sînt cele mai mici. Modelul problemei va fi de forma

$$A^+ x \leqslant b^-$$
$$x \geqslant 0$$
$$f^- = \max c^- x$$

sau, cu date numerice:

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 300$$
$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqslant 300$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$$
$$\max(x_1 + 3x_2 + 2x_3).$$

Soluția acestui model este $x_1 = 0$; $x_2 = {}^{100}/_3$; $x_3 = {}^{100}/_3$ și valoarea funcției obiectiv este $f^- = {}^{500}/_3$

În varianta optimistă se presupune că există materia primă A_4 care corespunde celor mai mici indici de utilizare a mașinilor, că disponibilul de ore este cel mai mare și că beneficiile realizabile sînt 3; 4 și 3 unități bănești. Modelul acestei variante este de forma

$$A^- x \leqslant b^+$$
$$x \geqslant 0$$
$$f^+ = \max c^+ x$$

sau, folosind datele problemei,

$$1{,}5x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 300$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 500$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$$
$$\max(3x_1 + 4x_2 + 3x_3).$$

Soluția acestui model este $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $x_3 = 140$ și valoarea funcției obiectiv $f^+ = 740$.

Informațiile de care dispunem după rezolvarea acestor probleme este că beneficiul pe care îl poate obține întreprinderea nu poate fi mai mic de 500/3 unități bănești și nu poate depăși 740 unități.

Această informație nu poate fi considerată satisfăcătoare. Pentru a cunoaște beneficiul maxim în fiecare ipoteză care se poate face în legătură cu materia primă utilizată, disponibilul de ore și beneficiul unitar ar trebui rezolvate 16 modele de forma

$$A_s x \leqslant b_j$$
$$x \geqslant 0$$
$$f = \max c_k x$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă A_i; $i = 1, \ldots, 4$ sînt matricele tehnologice corespunzătoare materiei prime A_i; b_j, $j = 1, 2$ sînt vectorii disponibilului de ore al mașinilor și c_k; $k = 1,2$ sînt vectorii beneficiilor unitare.

Problema propusă devine o problemă de programare stochastică dacă se cunosc probabilitățile de a dispune de fiecare materie primă, de numărul de ore în care pot fi utilizate mașinile și de a realiza un anumit beneficiu unitar.

Revenind la cazul general și notînd $A(\omega) = (a_{ij}(\omega))$; $i \in I, j \in J$ $b(\omega) = (b_k(\omega))k \in I$ și $c(\omega) = (c_l(\omega))l \in J$ trei matrice a căror elemente sînt variabile aleatoare pe un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, \mathbf{P})$, modelele

$$\begin{aligned} A(\omega)x &\geqslant b(\omega) \\ x &\geqslant 0 \qquad \text{(I)} \\ f(\omega) &= \min_x c(\omega)x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A(\omega)x &\geqslant b(\omega) \\ x &\geqslant 0 \qquad \text{(II)} \\ \varphi(\omega) &= \max_x c(\omega)x \end{aligned}$$

constituie probleme de programare liniară stochastică. Soluțiile acestor probleme cît și funcțiile $f(\omega)$, $\varphi(\omega)$ sînt variabile aleatoare. Rezolvarea problemei de programare stochastică constă în determinarea repartiției mixte a variabilelor aleatoare $f(\omega)$ și $x(\omega)$ (respectiv $\varphi(\omega)$ și $x(\omega)$). Sub această formă generală problema este foarte dificilă.

M. Iosifescu și R. Theodorescu [25], [26] obțin unele rezultate în modul următor:

Se consideră două probleme de programare liniară deterministică pentru modelul (I) și anume

$$\begin{aligned} A_\lambda^+ Y &\geqslant B_\mu^- \\ Y &\geqslant 0 \qquad (I_1) \\ f_{\lambda,\mu}^- &= \min_Y c_\mu^- Y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A_\mu^- Y &\geqslant B_\lambda^+ \\ Y &\geqslant 0 \qquad (I_2) \\ f_{\lambda,\mu}^+ &= \min_Y c_\lambda^+ Y \end{aligned}$$

unde λ și μ sînt numere reale pozitive și

$$\begin{aligned} A_\mu^- &= [\mathbf{E}(a_{ij}) - \mu\mathbf{D}(a_{ij})] \\ B_\mu^- &= [\mathbf{E}(b_k) - \mu\mathbf{D}(b_k)] \\ C_\mu^- &= [\mathbf{E}(c_l) - \mu\mathbf{D}(c_l)] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A_\lambda^+ &= [\mathbf{E}(a_{ij}) + \lambda\mathbf{D}(a_{ij})] \\ B_\lambda^+ &= [\mathbf{E}(b_k) + \lambda\mathbf{D}(b_k)] \\ C^+ &= [\mathbf{E}(c_l) + \lambda\mathbf{D}(c_l)], \end{aligned}$$

unde $\mathbf{E}(\xi)$ este valoarea medie iar $\mathbf{D}$ abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ.

Din teoremele I și III se știe că mulțimea soluțiilor problemei (I_1), ${}^+\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^-$ conține mulțimea soluțiilor problemei (I_2) ${}^-\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^+$ și că

$$f_{\lambda,\mu}^- \leqslant f_{\lambda,\mu}^+$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\Delta_{\lambda,\mu} = {}^{+}\mathcal{D}^{-}_{\lambda,\mu} - {}^{-}\mathcal{D}^{+}_{\lambda,\mu}$. Pe baza acestor rezultate autorii susciteaţi demonstrează

Teorema IV. Probabilitatea ca valoarea $f(\omega)$ să fie cuprinsă între $f^{-}_{\lambda,\mu}$ şi $f^{+}_{\lambda,\mu}$ şi ca soluţiile Y să aparţină mulţimii $\Delta_{\lambda,\mu}$ este cel puţin egală cu $\mathbf{P}(A^{-}_{\mu} \leqslant A(\omega) \leqslant A^{+}_{\mu},\ B^{-}_{\mu} \leqslant B(\omega) \leqslant B^{+}_{\mu},\ C^{-}_{\mu} \leqslant C(\omega) \leqslant C^{+}_{\mu})$. Dacă variabilele aleatoare $a_{ij}(\omega)$, $b_k(\omega)$, $c_l(\omega)$ sînt independente şi normale probabilitatea evenimentului considerat este cel puţin egală cu $[\Phi(\lambda) + \Phi(\mu) - 1]^{mn+m+n}$, Φ fiind funcţia de repartiţie normală.

O teoremă analogă se poate enunţa şi pentru problema (II) din pagina 14.

Presupunînd că repartiţia mixtă a variabilelor aleatoare $f(\omega)$ şi $x(\omega)$ ar fi cunoscută, ea nu dă posibilitatea de a determina soluţia optimă dar poate fi folosită pentru a determina o „regiune de decizie" adică un domeniu în spaţiul n-dimensional în care se găseşte soluţia optimă cu o probabilitate dată. Cunoscînd regiunea de decizie nu dispunem, totuşi, de un program de activitate.

Se poate considera ca soluţie optimă vectorul x care realizează minimul funcţiei

$$\int_{\Omega} [f(\omega) - c(\omega)x]^2 d\mathbf{P}(\omega) \tag{I.1.35}$$

cu condiţia

$$\begin{gathered} A^{-}_{\mu} x \geqslant B^{+}_{\lambda} \\ x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{I.1.36}$$

Restricţiile (I.1.36) exprimă condiţia ca x să satisfacă sistemul $A(\omega)x \geqslant b(\omega)$ cu o probabilitate cel puţin egală cu $\mathbf{P}(A^{-}_{\mu} \leqslant A(\omega),\ B(\omega) \leqslant B^{+}_{\lambda})$. Modelul (I.1.35) — (I.1.36) este o problemă de programare pătratică. În adevăr, funcţia (I.1.35) se poate scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(c_i^2) x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbf{E}(c_i c_j) x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

unde

$$\alpha_i = \int_{\Omega} [f(\omega) - c_i(\omega)] d\mathbf{P}(\omega); \qquad i = 1, \ldots, n.$$

M. Iosifescu şi R. Theodorescu reiau [26] tema rezolvării problemelor de programare liniară de tipul I. În lucrarea citată se arată

Scanned with OKEN Scanner

că se poate folosi teoria jocurilor pentru rezolvarea acestor probleme dacă :

(*i*) se cunoaşte repartiţia conjugată a unei părţi din componentele matricelor A, b, c (incertitudine parţială) sau

(*ii*) repartiţia conjugată a matricelor A, b, c este necunoscută (incertitudine totală) sau

(*iii*) repartiţia conjugată a matricelor A, b, c este complet cunoscută (programare stochastică).

Ultimele două cazuri sînt privite ca situaţii extreme ale incertitudinii parţiale.

§ 2. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE CU ELEMENT ALEATOR VECTORUL C

Pentru a lămuri sensul unei probleme de programare în care vectorul c din funcţia obiectiv este aleator, analizăm următoarea situaţie: o unitate industrială dispune de materii prime şi utilaje care îi îngăduie să producă un anumit sortiment de bunuri de consum. În momentul în care trebuie să se decidă nivelul producţiei pentru fiecare produs, adică ce cantităţi trebuie planificate, nu se cunosc preţurile cu care se pot realiza pe piaţă aceste bunuri. Se poate admite că preţurile de desfacere ale produselor sînt independente de cantităţile produse sau depind de aceste cantităţi şi că scopul în care se face planificarea este de a asigura întreprinderii un beneficiu global maxim.

Pentru a da o formulare matematică acestei probleme, să notăm cu $M_1, M_2, \ldots, M_n$ bunurile care se pot produce în condiţiile de care dispune unitatea industrială. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cantităţile necunoscute de bunuri $M_1, M_2, \ldots, M_n$ care se vor produce şi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ beneficiile realizabile pentru fiecare unitate din produsele $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Obiectivul planificării este maximizarea funcţiei

$$f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(c_i x_i). \tag{I.2.1}$$

Este evident că planificarea trebuie să ţină seama şi de condiţiile tehnologice de producţie astfel că variabilele x_j ; $j = 1, \ldots, n$ sînt obligate să satisfacă un sistem de restricţii care se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} &g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b; && i = 1, \ldots, m_1 \\ &g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b; && i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\ &g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant b; && i = m_2 + 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de faptul că x_j ; $j = 1, \ldots, n$ reprezintă cantităţi de produse, este logic să se impună acestor mărimi şi condiţii de nenegativitate, adică

$$x_j \geqslant 0\,;\ j = 1, \ldots, n. \tag{I.2.3}$$

În cazul cel mai simplu şi destul de frecvent în practică, restricţiile (I.2.2) sînt liniare iar preţurile c_j sînt independente de cantităţile produse x_j, astfel că planul optim este soluţia unei probleme de programare liniară. Dacă beneficiile care se pot obţine sînt cunoscute în momentul cînd se rezolvă modelul atunci se caută soluţia unei probleme de programare liniară pe care o vom numi *deterministică* sau *algebrică*. Dacă beneficiile sînt mărimi aleatoare avem o problemă de programare liniară cu funcţia economică stochastică.

A rezolva un program deterministic înseamnă a găsi un vector $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ cu componente nenegative care să satisfacă sistemul de restricţii şi să realizeze optimul (maximul sau minimul) funcţiei obiectiv.

Ce înseamnă a rezolva un program stochastic? Să ne referim la problema planificării producţiei cu scopul de a asigura un beneficiu global maxim. Planificarea se face în momentul în care nu se cunosc beneficiile unitare dar pot fi cunoscute — fie numai $\mathbf{E}c_j$ valorile medii ale variabilelor aleatoare c_j ; $j = 1, \ldots, n$ — fie distribuţiile acestor variabile aleatoare.

În prima ipoteză, dacă se adoptă ca obiectiv maximizarea beneficiului mediu, soluţia optimă este vectorul nenegativ x care satisface restricţiile şi realizează

$$\max \mathbf{E}(cx). \tag{I.2.4}$$

Soluţiile sistemului $Ax \leqslant b$ sînt independente de c. Dacă preţurile unitare c_j nu sînt influenţate de nivelul producţiei, valoarea medie a funcţiei de cost cx este

$$\mathbf{E}(cx) = (\mathbf{E}c)x$$

astfel că problema

$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max \mathbf{E}(cx)$$

este o problemă deterministică.

Înainte de a discuta ce se poate înţelege prin a rezolva modelul în ipoteza a doua, vom stabili distribuţia indusă pe mulţimea soluţii-

Scanned with OKEN Scanner

lor optime a unei probleme de programare liniară de distribuţia vectorului aleator c. În acest scop să considerăm problema:

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \max cx \end{gathered} \tag{I.2.5}$$

în care A este o matrice $m \times n$ dimensională; b o matrice $m \times 1$; c o matrice $1 \times n$. Să admitem că rangul matricei A este m. Mulţimea soluţiilor realizabile a sistemului restricţiilor este un domeniu convex $\mathcal{D}$, care se obţine intersectînd semispaţiile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i.$$

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vertexurile acestui domeniu şi x^s, $s = 1, \ldots, k$ vectorii formaţi din coordonatele acestor puncte. Se poate enunţa:

Teorema I. Fiecare vector x^s, $s = 1, \ldots, k$ asociat unui vertex p_s $s = 1, \ldots, k$ al domeniului $\mathcal{D}$, este soluţia optimă a problemei (I.2.5) pentru toţi vectorii c care aparţin unui con poliedric convex γ_s cu vîrful în originea spaţiului R^n.

Demonstraţie. Vectorul x^s este o soluţie extremală a sistemului de restricţii deci există o bază B_s formată din m vectori ai matricei (A, I) astfel încît

$$x^s = B_s^{-1} b$$

Soluţia x^s este optimă dacă

$$z_j - c_j \geqslant 0 \quad \text{pentru toţi} \quad a_j \notin B_s. \tag{I.2.6}$$

Se ştie că $z_j = c_{B_s} B_s^{-1} a_j$, deci criteriile de optimalitate (I.2.6) pentru x^s se mai pot scrie sub forma

$$c_{B_s} B_s^{-1} a_j - c_j \geqslant 0. \tag{1.2.7}$$

Inegalităţile (I.2.7) sînt funcţii liniare şi omogene de componentele vectorului c deci ecuaţiile $c_{B_s} B_s^{-1} a_j - c_j = 0$ reprezintă în R^n hiperplane care trec prin origine. Sistemul (I.2.7) defineşte un con poliedric convex, γ_s, cu vîrful în origine.

Scanned with OKEN Scanner

Din algoritmul simplex se știe că este adevărată și afirmația reciprocă : pentru orice c din conul γ_s soluția optimă a problemei (I.2.5) este x^s.

Teorema este demonstrată.

Observație. Dacă domeniu $\mathcal{D}$ este mărginit mulțimea conurilor γ_s umple spațiul R^n adică :

$$\bigcup_{s=1}^{k} \gamma_s = R^n.$$

Vom verifica teorema I pe următorul

Exemplul I. Să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 6 \\ 8x_1 - 5x_2 &\leqslant 16 \\ -x_1 + 3x_2 &\leqslant 17 \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0 \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

care maximizează funcția

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

cînd c_1, c_2 pot lua orice valori reale.

Pentru aplicarea algoritmului simplex, sistemul de restricții se scrie sub forma

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - y_1 + y_2 &= 6 \\ 8x_1 - 5x_2 + y_3 &= 16 \\ -x_1 + 3x_2 + y_2 &= 17 \\ -3x_1 + x_2 + y_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ \ldots,\ y_5 \geqslant 0$$

Funcția obiectiv este

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 - My_2)$$

Iterațiile simplex sînt redate în tabelul (2).

Scanned with OKEN Scanner

c_B	$c_j \rightarrow$		c_1	c_2	0	$-M$	0	0	0	Condiții de optimalitate
	Baza	Soluția	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
$-M$	$\leftarrow y_2$	6	3*	2	-1	1				
0	y_3	16	8	-5			1			
0	y_4	17	-1	3				1		
0	y_5	3	-3	1					1	
		$-6M$	$-3M-c_1$	$-2M-c_2$	M	0	0	0	0	
c_1	$\leftarrow x_1$	2	1	$^2/_3$*	$-^1/_3$					$2c_1-3c_2\geq 0$
0	y_3	0		$-^{31}/_3$	$^8/_3$		1			$c_1\leq 0$
0	y_4	19		$^{11}/_3$	$-^1/_3$			1		Vîrf optim
0	y_5	9		3	-1				1	A(2, 0)
		$2c_1$	0	$^2/_3c_1-c_2$	$-^1/_3c_1$	0	0	0	0	
c_2	x_2	3	$^3/_2$	1	$-^1/_2$					$-2c_1+3c_2\geq 0$
0	y_3	31	$^{31}/_2$		$-^3/_2$		1			$c_2\leq 0$
0	y_4	8	$-^{11}/_2$		$^3/_2$			1		Vîrf optim
0	$\leftarrow y_5$	0	$-^9/_2$		$^1/_2$*				1	B(0, 3)
		$3c_2$	$^3/_2c_2-c_1$	0	$-^1/_2c_2$	0	0	0		
c_2	x_2	3	-3	1					1	$c_1+3c_2\leq 0$
0	y_3	31	-7			1			5	$c_2\geq 0$
0	$\leftarrow y_4$	8	8*					1	-3	Vîrf optim
0	y_1	0	-9		1				2	B(0, 3)
		$3c_2$	$-3c_2-c_1$	0	0	0	0		c_2	
c_2	x_2	6		1				$^3/_8$	$-^1/_8$	$c_1+3c_2\geq 0$
	$\leftarrow y_3$	38				1		$^7/_8$	$^{19}/_8$*	$3c_1+c_2\leq 0$
c_1	x_1	1	1					$^1/_8$	$-^3/_8$	Vîrf optim
	y_1	9			1			$^9/_8$	$-^{11}/_8$	C(1, 6)
		c_1+6c_2	0	0	0	0	$\frac{3c_2+c_1}{8}$		$-\frac{c_2+3c_1}{8}$	
c_2	x_2	8		1		$^1/_{19}$	$^8/_{19}$*			$3c_1+c_2\geq 0$
	y_5	16				$^8/_{19}$	$^7/_{19}$		1	$5c_1+8c_2\geq 0$
c_1	x_1	7	1			$^3/_{19}$	$^5/_{19}$			Vîrf optim
	y_1	31			1	$^{11}/_{19}$	$^{31}/_{19}$			D(7, 8)
		$7c_1+8c_2$	0	0	0	$\frac{3c_1+c_2}{19}$	$\frac{8c_2+5c_1}{19}$		0	
	y_4	19		$^{19}/_8$		$^1/_8$	1			$5c_1+8c_2\leq 0$
	y_5	9		$-^7/_8$		$^3/_8$			1	$c_1\geq 0$
c_1	x_1	2	1	$-^5/_8$		$^1/_8$				Vîrf optim
	y_1	0		$-^{31}/_8$	1	$^3/_8$				A(2,0)
		$2c_1$	0	$-\frac{8c_2+5c_1}{8}$	0	$^1/_8c_1$	0		0	

Scanned with OKEN Scanner

Vom folosi și reprezentarea grafică pentru ca rezultatele să poată fi mai ușor urmărite. Mulțimea soluțiilor realizabile pentru sistemul restricțiilor este poligonul convex ABCD (fig 2 a).

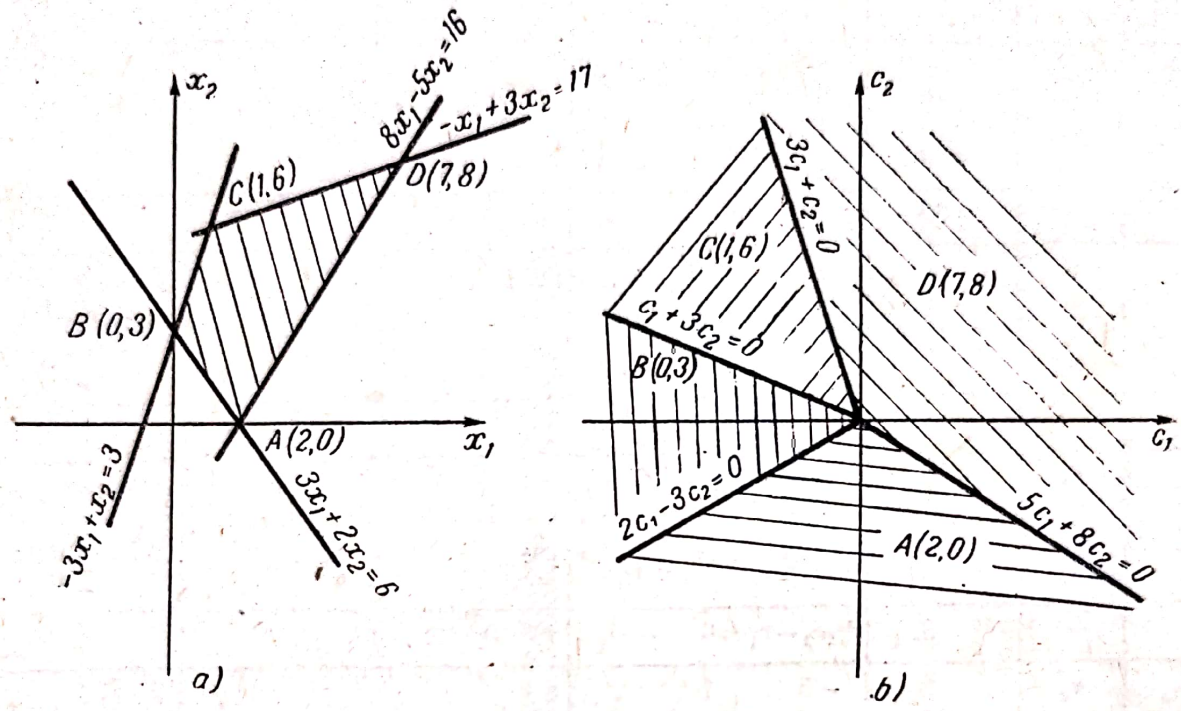

Fig. 2

Vîrful A(2, 0) este optim pentru orice vector c din conul γ_A limitat de semidreptele $2c_1 - 3c_2 = 0$; $5c_1 + 8c_2 = 0$; B(0,3) este optim pentru vectorii c care aparțin conului γ_B limitat de semidreptele $2c_1 - 3c_2 = 0$; $c_1 + 3c_2 = 0$; $c(1,6)$ este optim pentru vectorii c din conul $c_1 + 3c_2 = 0$; $3c_1 + c_2 = 0$ și D(7, 8) pentru c în conul $3c_1 + c_2 = 0$; $5c_1 + 8c_2 = 0$ (fig 2 b). Se observă că

$$\gamma_A \cup \gamma_B \cup \gamma_C \cup \gamma_D = R^2$$

Mai mult, vectorii directori ai razelor care limitează, de exemplu, conul γ_A sînt normali pe vectorii directori ai dreptelor care determină vîrful A.

Exemplul II. Să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\geqslant 15 \\ 2x_1 - 5x_2 &\leqslant 10 \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

care realizează maximul funcției

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

cînd c_1, c_2 iau valori reale.

Pentru aplicarea algoritmului simplex se scrie modelul sub forma

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - y_1 + y_2 &= 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + y_3 &= 10 \\ -3x_1 + x_2 + y_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geqslant 0$$

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 - My_2)$$

Folosind algoritmul simplex avem

(3)

c_B	$c_j \rightarrow$		c_1	c_2	0	$-M$	0	0	Condiții de optimalitate
	Baza	Soluția	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-M$	$\leftarrow y_2$	15	3	5*	-1	1			
0	y_3	10	2	-5			1		
0	y_4	3	-3	1				1	
		$-15M$	$-3M-c_1$	$-5M-c_2$	M	0	0	0	
c_2	x_2	3	$^3/_5$	1	$-{}^1/_5$				$5c_1-3c_2 \leqslant 0$
0	y_3	25	5*		1		1		$c_2 \leqslant 0$
0	y_4	0	$-{}^{18}/_5$		$^1/_5$			1	Vîrf optim B(0, 3)
		$3c_2$	$^3/_5c_2-c_1$	0	$-{}^1/_5c_2$		0	0	
c_2	x_2	0		1	$-{}^2/_{25}$		$-{}^3/_{25}$		$5c_1-3c_2 \geqslant 0$
c_1	x_1	5	1		$-{}^1/_5$		$^1/_5$		$5c_1+2c_2 \leqslant 0$
0	y_4	18			$-{}^{13}/_{25}$		$^{18}/_{25}$	1	Vîrf optim A(5, 0)
		$5c_1$	0	0	$-{}^1/_{25}(2c_2+5c_1)$		$^1/_{25}(-3c_2+5c_1)$	0	

Vectorul y_1 are toate componentele negative încît, dacă $2c_2 + 5c_1$ este negativ problema nu are optim finit. Dacă baza $(x_2y_3y_4)$ se modifică înlocuind vectorul y_4 prin y_1 avem situația din tabelul 4.

Scanned with OKEN Scanner

(4)

c_B	$c_j \rightarrow$		c_1	c_2	0	$-M$	0	0	Condiţii de optimalitate
	Baza	Soluţia	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
c_2	x_2	3	-3	1				1	$c_1+3c_2 \leqslant 0$
0	y_3	25	-13				1	5	$c_2 \geqslant 0$
0	y_1	0	-18		1			5	
		$3c_2$	$-3c_2-c_1$	0	0		0	c_2	

Din fig. 3 *a* şi *b* se vede că mulţimea soluţiilor sistemului de restricţii este nemărginită şi problema are optim finit numai pentru vectorii c care aparţin conului γ_A limitat de semidreptele $5c_1 + 2c_2 = 0$; $5c_1 - 3c_2 = 0$ sau conului γ_B limitat de semidreptele $5c_1 - 3c_2 = 0$; $c_1 + 3c_2 = 0$.

Reuniunea conurilor γ_A şi γ_B este limitată de semidreptele $5c_1 + 2c_2 = 0$; $c_1 + 3c_2 = 0$ ai căror vectori directori sînt respectiv normali pe dreptele AM şi BN care sînt laturile infinite ale domeniului D. Problema nu are optim finit pentru vectorii c care aparţin mulţimii

$$R^2 - (\gamma_A \cup \gamma_B).$$

Din rezultatele obţinute reiese cu uşurinţă teorema II.

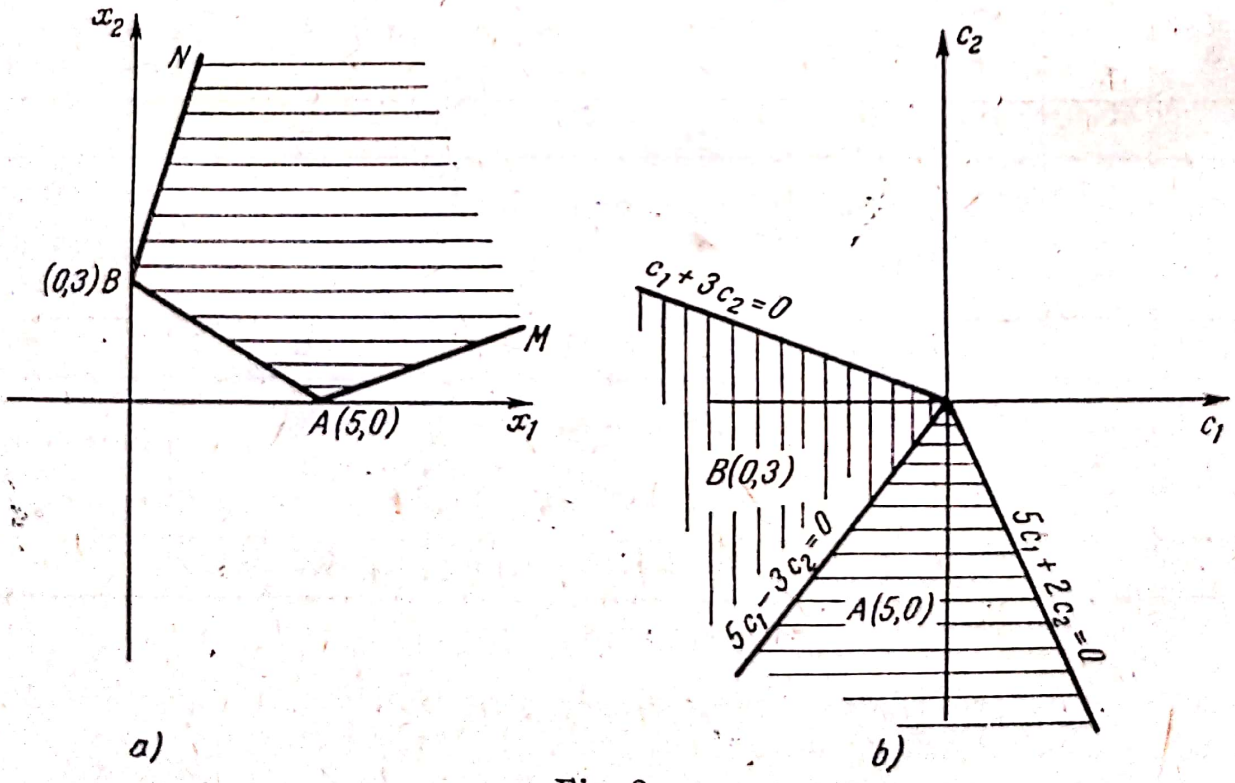

Fig. 3

Teorema II. Dacă mulțimea soluțiilor sistemului de restricții al problemei (I.2.5) este nevidă și mărginită pentru un vector dat b soluția optimă $x^*(c)$ și $\max cx$ există și sînt mărginite pentru orice vector c din R^n.

Dacă mulțimea soluțiilor sistemului de restricții al problemei (I.2.5) este nemărginită pentru un vector dat b, soluția optimă $x^*(c)$ și $\max cx$ există și sînt mărginite numai pentru vectorii c care aparțin conului poliedric convex rezultat din reuniunea conurilor asociate soluțiilor de bază.

Teorema III. Funcția $f(c) = \{\max cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ este o funcție convexă de c pentru orice b dat.

Demonstrație. După cum s-a văzut funcția $f(c)$ este definită pentru orice $c \in R^n$ și mărginită pe o mulțime convexă care poate fi R^n sau un con poliedric γ. Să considerăm vectorii c_1 și c_2 pentru care $x^*(c_1)$ și $x^*(c_2)$ sînt soluții optime (mărginite sau nu). Fie vectorul

$$c_0 = \lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2 \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{I.2.8}$$

căruia îi corespunde soluția optimă $x^*(c_0)$. Deoarece $x^*(c_1)$ maximizează funcția c_1x, valoarea acestei funcții pentru $x^*(c_1)$ este cel puțin egală cu valoarea ei pentru $x^*(c_0)$, deci

$$c_1x^*(c_0) \leqslant c_1x^*(c_1). \tag{I.2.9}$$

De asemenea,

$$c_2x^*(c_0) \leqslant c_2x^*(c_2) \tag{I.2.10}$$

Înmulțind respectiv inegalitățile (I.2.9) și (I.2.10) cu numerele nenegative λ și $(1 - \lambda)$ și adunîndu-le, avem

$$(\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2)x^*(c_0) \leqslant \lambda c_1x^*(c_1) + (1 - \lambda)c_2x^*(c_2) \tag{I.2.11}$$

Ținînd seama de definiția vectorului c_0, avem

$$c_0x^*(c_0) \leqslant \lambda c_1x^*(c_1) + (1 - \lambda)c_2x^*(c_2). \tag{I.2.12}$$

Inegalitatea (I.2.12) scrisă sub forma

$$f(\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2) \leqslant \lambda f(c_1) + (1 - \lambda)f(c_2)$$

dovedește convexitatea funcției $f(c)$ pentru orice b dat. Dacă $f(c_1)$ sau $f(c_2)$ sînt nemărginite, inegalitatea este evident satisfăcută.

Analog se poate dovedi că

$$g(c) = \{\min cx | Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

este o funcție concavă de c pentru orice b.

Scanned with OKEN Scanner

Să stabilim acum legea de probabilitate indusă pe mulțimea soluțiilor optime de distribuție $\varphi(c)$ a vectorului aleator c în ipoteza că mulțimea soluțiilor realizabile ale sistemului $Ax \leqslant b$ este nevidă și mărginită. În acest caz mulțimea soluțiilor optime este formată de vertexurile poliedrului convex limitat de hiperplanele $\sum_j a_{ij}x_j \leqslant b_i$; $i = 1, \ldots, m$. Poliedrul are un număr finit, să zicem k de vertexuri. Fie x^s, $s = 1, \ldots, k$ vectorii asociați acestor vertexuri. Prin teorema I s-a stabilit că x^s este optim pentru $c \in \gamma_s$ deci probabilitatea ca x^s să fie soluție optimă este dată de probabilitatea ca $c \in \gamma_s$. Astfel, notînd cu x^* soluția optimă, avem:

$$P(x^* = x^s) = P(c \in \gamma_s) = \int_{\gamma_s} \varphi(c)dc; \qquad s = 1, \ldots, k. \quad \text{(I.2.16)}$$

Se observă că $f(c) = \{\max cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ este o variabilă aleatoare și că probabilitatea ca $f(c)$ să ia o anumită valoare, de exemplu, cx^r este egală cu probabilitatea ca soluția optimă să fie x^r sau ca vectorul c să aparțină conului γ_r generat de normalele la hiperplanele care trec prin vertexul p_r determinat de vectorul x^r. Din această observație rezultă că, fiind cunoscută densitatea de probabilitate $\varphi(c)$, valoarea medie a variabilei aleatoare $f(c)$ este

$$\mathbf{E}f(c) = \sum_{s=1}^{k} \int_{\gamma_s} (cx_s^*)\, d\varphi(c). \qquad \text{(I.2.14)}$$

Odată ce s-a obținut acest rezultat ne putem pune următoarele întrebări:

— Practic poate fi calculată valoarea medie a maximului funcției cx prin formula (I.2.14) pentru modelele care reprezintă probleme reale?

— Fiind cunoscută valoarea medie a maximului funcției obiectiv adică, în interpretarea pe care am folosit-o mai sus, valoarea medie a beneficiului maxim ce se poate obține pentru o anumită lege de probabilitate a prețurilor, care este planul optim de producție?

— Alegînd ca funcție obiectiv $\mathbf{E} \max cx$ se obține în adevăr o soluție optimă pentru producție?

Răspunsul la prima întrebare implică o analiză a formulei (I.2.14) analiză din care rezultă că pentru a calcula valoarea medie a maximului funcției obiectiv trebuie să se cunoască toate bazele asociate vertexurilor poliedrului soluțiilor realizabile. Această sarcină nu este simplă în problemele reale care conțin un număr mare de restricții și variabile. Metoda descrierii complete [24] dă totuși posibilitatea determinării acestor baze astfel încît formula (I.2.14) este aplicabilă din acest punct de vedere, dar calculele sînt foarte laborioase.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vectorul c este o variabilă aleatoare discretă, cu un număr finit r de valori, $\mathbf{E} \max cx$ se calculează rezolvînd r probleme deterministice în care vectorului c i se atribuie pe rînd fiecare din cele r valori pe care le poate lua.

Pentru cazurile în care vectorul c este o variabilă aleatoare continuă ale cărei valori sînt concentrate în jurul unei anumite mărimi c^*, R. Fortet [21] afirmă că este verosimil ca distribuţia indusă pe mulţimea soluţiilor optime $x^*(c)$ să fie suficient de concentrată în jurul valorii $x^*(c^*)$. Această afirmaţie justifică următorul procedeu pentru determinarea $\mathbf{E} \max cx$.

— se calculează soluţia $x^*(c^*)$ şi soluţiile în vîrfurile vecine,

— se determină probabilităţile asociate fiecărei soluţii calculate. Calculul se consideră terminat atunci cînd probabilitatea ataşată soluţiilor care au rămas necalculate este suficient de mică.

Procedeul propus de R. Fortet [21] poate da un răspuns şi celei de a doua întrebări. Cunoscînd probabilităţile soluţiilor optime $x^*(c)$, se va considera plan optim acel $x^*(c)$ care corespunde probabilităţii maxime.

Pentru a răspunde ultimei întrebări trebuie precizat ce se înţelege prin soluţie optimă în problemele în care funcţia obiectiv este stochastică. Referindu-ne la sensul economic al funcţiei obiectiv, putem spune că a determina vectorul x care realizează $\mathbf{E} \max cx$ înseamnă a stabili planul de producţie x^* pentru care se obţine valoarea medie a beneficiului maxim.

În unele cazuri poate fi preferabil ca planificarea producţiei să asigure beneficiul corespunzător riscului minim. Atunci se poate considera ca soluţie optimă planul realizabil de producţie care corespunde unui beneficiu $cx > \alpha$, cu probabilitatea maximă. Numărul α poate fi privit ca un parametru. În cele ce urmează vom reveni asupra acestor consideraţii.

O problemă de programare stochastică, privită din punctul de vedere al teoriei jocurilor, poate fi considerată ca un joc în care cei doi parteneri sînt „planificatorul" şi „natura". Dacă „planificatorul" are posibilitatea de a cunoaşte valoarea elementului aleator înainte de a lua o hotărîre atunci dispune de un model deterministic. Soluţia acestui model este planul optim în situaţia cunoscută. Acest mod de a trata problema este denumit în literatura de specialitate (în limba engleză) *wait and see* adică a aştepta şi a vedea. Noi vom adopta termenul de *politică de aşteptare*. Dacă situaţia se repetă de un mare număr de ori, se poate stabili distribuţia variabilei aleatoare c şi legea de probabilitate indusă de aceasta pe mulţimea soluţiilor optime, cunoscîndu-se legea de probabilitate dată de formula (I.2.13) pentru

Scanned with OKEN Scanner

diferitele soluţii optime, deci pentru diferite posibilităţi de planificare a activităţii, se cunoaşte şi valoarea medie a beneficiului maxim, dat de formula (I.2.14) şi se poate construi un interval de încredere pentru asigurarea acestui beneficiu.

O altă situaţie care se poate prezenta este aceea în care „planificatorul" trebuie să fixeze nivelul fiecărei activităţi x_j, $j = 1, \ldots, n$ înainte ca „natura" să fi fixat valoarea elementului aleator c. Aceste cazuri, opuse politicii de aşteptare, sînt numite de A. Madansky [31] *here and now* adică aici şi acum. În astfel de situaţii „planificatorul" poate alege un program care maximizează valoarea medie a funcţiei obiectiv. Un astfel de program este denumit de J. P. Brans [8] o *soluţie Bayes*. Este uşor de constatat că pentru orice soluţie realizabilă x, avem

$$\mathbf{E}(cx) = (\mathbf{E}c)x \leqslant \mathbf{E}[cx^*(\mathbf{E}c)] = (\mathbf{E}c)x^*(\mathbf{E}c)$$

şi prin urmare

$$\max \mathbf{E}\ (cx) = \mathbf{E}[cx^*(\mathbf{E}c)]. \qquad \text{(I.2.15)}$$

De aceea vom considera că $x^*(\mathbf{E}c)$ constituie „cea mai bună politică".

Exemplul III. Reluăm exemplul I atribuind componentelor vectorului c următoarele legi de repartiţie

$$f(c_1) = \frac{1}{13}\,[-3 \leqslant c_1 \leqslant 10] \qquad f(c_2) = \frac{1}{11}\,[-2 \leqslant c_2 \leqslant 9].$$

Se cere legea de repartiţie indusă pe vîrfurile poligonului soluţiilor realizabile de legea de repartiţie a vectorului c.

Folosind fig. 4 şi aplicînd formula (I.2.13) găsim:

$$\mathbf{P}(x = x_A) = \mathbf{P}(c \in \gamma_A) = \int_{\gamma_A} f(c_1)f(c_2)dc_1dc_2 = \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \frac{31}{5}$$

$$\mathbf{P}(x = x_B) = \mathbf{P}(c \in \gamma_B) = \int_{\gamma_B} f(c_1)f(c_2)dc_1dc_2 = \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \frac{9}{2}$$

$$\mathbf{P}(x = x_C) = \mathbf{P}(c \in \gamma_C) = \int_{\gamma_C} f(c_1)f(c_2)dc_1dc_2 = \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot 12$$

$$\mathbf{P}(x = x_D) = \mathbf{P}(c \in \gamma_D) = \int_{\gamma_D} f(c_1)f(c_2)dc_1dc_2 = \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \frac{1203}{10}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a calcula $\mathbf{E} \max cx$ folosim formula (I.2.17) și avem

$$\mathbf{E} \max cx = \frac{1}{11 \cdot 13}\left[\int_{\gamma_A} 2c_1 dc_1 dc_2 + \int_{\gamma_B} 3c_2 dc_1 dc_2 + \int_{\gamma_C} (c_1 + 6c_2) dc_1 dc_2 + \right.$$
$$\left. + \int_{\gamma_D} (7c_1 + 8c_2) dc_1 dc_2\right] \approx 37{,}5.$$

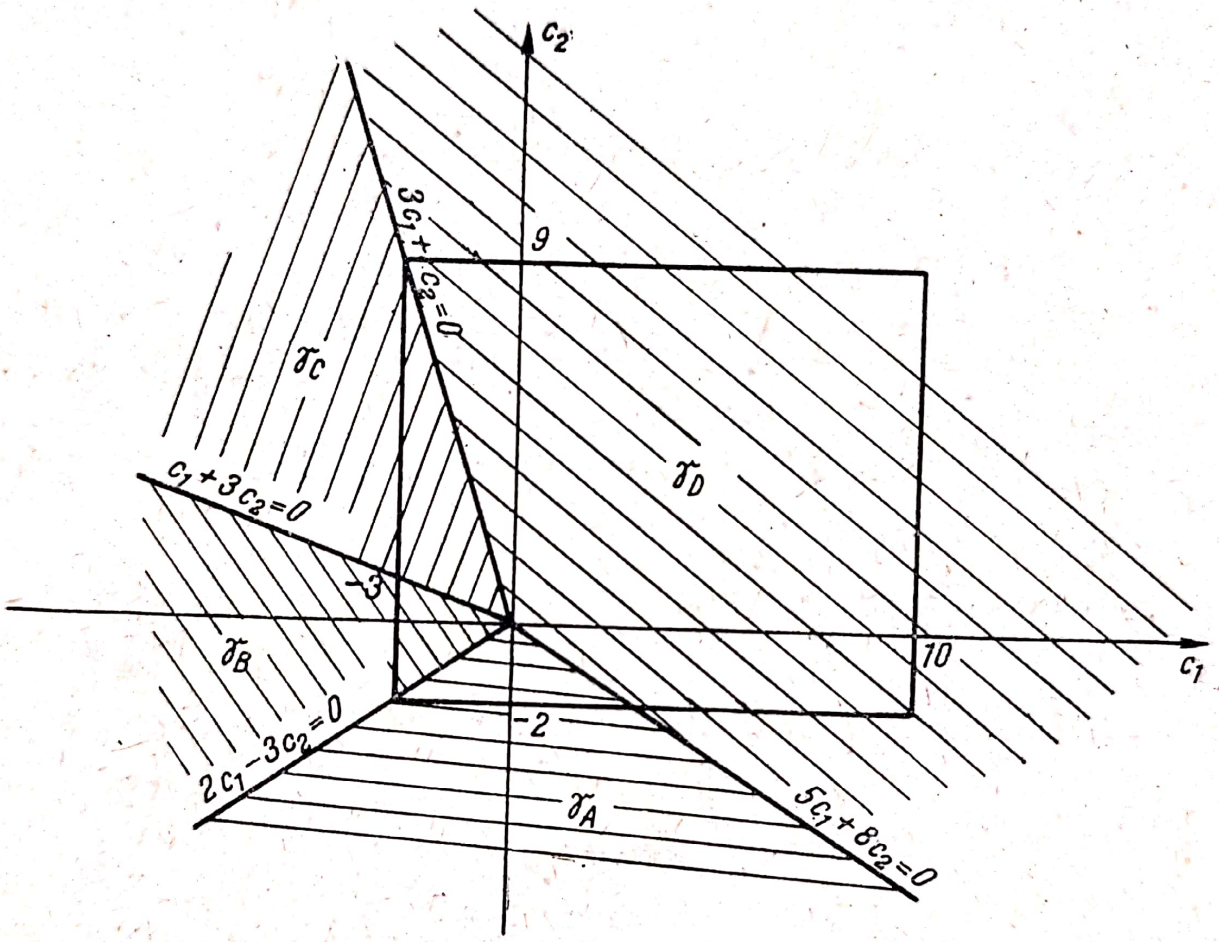

Fig. 4

Verificăm de asemenea că

$$\max_x \mathbf{E}\,(cx) = \mathbf{E}[cx^*(\mathbf{E}c)]$$

Avem

$$\mathbf{E}(cx) = \mathbf{E}(c_1x_1 + c_2x_2) = (\mathbf{E}c_1)x_1 + (\mathbf{E}c_2)x_2 = \frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2$$

$$\max_x \mathbf{E}(cx) = \max\left(\frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2\right).$$

Se observă că $x_1^*(\mathbf{E}c) = 7$, $x_2^*(\mathbf{E}c) = 8$

și că

$$\max_x \mathbf{E}(cx) = \frac{49}{2} + \frac{56}{2}.$$

Verificăm de asemenea și inegalitatea

$$37{,}5 \approx \mathbf{E} \max cx \leqslant \max_x \mathbf{E}(cx) = \frac{105}{2} = 52{,}5$$

(vezi și teorema V din acest paragraf). Revenind asupra distribuției variabilei aleatoare $f(c) = \{\max cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ vom considera cazul în care vectorul aleator c este de forma

$$c + t(\omega)d$$

c și d fiind vectori constanți, $t(\omega)$ o variabilă aleatoare cu valori într-un interval finit $[\delta_1, \delta_2]$ a cărei funcție de distribuție $F(z)$ este strict crescătoare pe $[\delta_1, \delta_2]$. Problema determinării distribuției variabilei aleatoare

$$f(\omega) = \{\min_x (c + t(\omega)d)x | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

este tratată de B. Bereanu [2].

Se admite că mulțimea soluțiilor sistemului $Ax = b$, $x \geqslant 0$ este mărginită și nevidă, $r(A) = m$ dacă A este o matrice $m \times n$ și că toate soluțiile de bază sînt nedegenerate.

Considerînd $t(\omega)$ ca un parametru și notînd $t(\omega) = \lambda$, problema

$$Ax = b$$

$$x \geqslant 0$$

$$\min_x (c + \lambda d)x \text{ pentru } \lambda \in [\delta_1, \delta_2]$$

este o problemă de programare liniară parametrică care se rezolvă determinînd valorile critice ale parametrului

$$\delta_1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{p-1} < \lambda_p = \delta_2$$

și soluțiile optime x^s corespunzătoare intervalelor $(\lambda_{s-1}, \lambda_s)$, $s = 1, \ldots, p$. În lucrarea citată se stabilește:

Teorema IV. Funcția de distribuție $F(z)$ a variabilei aleatoare

$$f(\omega) = \{\min_x (c + t(\omega)d)x | Ax = b,\ x \geqslant 0\} \qquad (I.2.16)$$

Scanned with OKEN Scanner

este

$$F(z) = \sum_{s=1}^{p} H_s(z) \tag{I.2.17}$$

unde, notînd cu $u_s(z) = \frac{z - cx^s}{dx^s}$, $H_s(z)$ ia valorile:

$$H_s(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \begin{cases} dx^s > 0 \text{ și } u_s(z) < \lambda_{s-1} \\ dx^s < 0 \text{ și } u_s(z) > \lambda_s \\ dx^s = 0 \text{ și } cx^s \geqslant z \end{cases} \\ T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1}) & \text{dacă} \begin{cases} dx^s > 0 \text{ și } u_s(z) \geqslant \lambda_s \\ dx^s < 0 \text{ și } u_s(z) \leqslant \lambda_{s-1} \\ dx^s = 0 \text{ și } cx^s < z \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} T(u_s(z)) - T(\lambda_{s-1}) \\ T(\lambda_s) - T(u_s(z)) \end{matrix}\right\} & \text{dacă } \lambda_{s-1} < u_s(z) < \lambda_s \text{ și } \begin{cases} dx^s > 0 \\ dx^s < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{I.2.18}$$

$1 \leqslant s \leqslant p$

unde $T(\lambda)$ este funcția de repartiție a lui $t(\omega)$, presupusă continuă. Probabilitatea ca x^s, $s = 1, \ldots, p$ să fie soluție optimă este

$$T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1})$$

Demonstrație. Fie A evenimentul $[\omega | f(\omega) < z]$ și E_s evenimentul $[\omega | \lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s]$. Deoarece $\bigcup_{s=1}^{p} E_s$ constituie evenimentul sigur, avem

$$F(z) = \mathbf{P}(A) = \sum_{s=1}^{p} \mathbf{P}(E_s)\mathbf{P}(A|E_s) = \sum_{s=1}^{p} \mathbf{P}(A \cap E_s)$$

și deci

$$F(z) = \sum_{s=1}^{p} \mathbf{P}(A \cap E_s). \tag{I.2.19}$$

Dacă se notează

$$\mathbf{P}(A \cap E_s) = H_s(z) \tag{I.2.20}$$

din (I.2.19) și (I.2.20) rezultă egalitatea (I.2.17). Rămîne de calculat $H_s(z) = \mathbf{P}\{[f(\omega) < z] \cap [\lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s]\}$. Deoarece x^s realizează minimul funcției $(c + t(\omega)d)x$ pe mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului $Ax = b$, avem

$$f(\omega) = cx^s + t(\omega)dx^s \qquad \text{cînd } \lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$H_s(z) = \mathbf{P}\{[cx^s + t(\omega)dx^s < z] \cap [\lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s]\}.$$

Să considerăm sistemul

$$cx^s + t(\omega)dx^s < z \qquad (I.2.21)$$

$$\lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s$$

Dacă $dx^s > 0$, din prima inegalitate a sistemului (I.2.21) găsim

$$t(\omega) < \frac{z - cx^s}{dx^s} = u_s(z)$$

încît sistemul admite soluţii pentru

$$\lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \min(\lambda_s, u_s(z)). \qquad (I.2.22)$$

Dacă $u_s(z) \leqslant \lambda_{s-1}$, intervalul (I.2.22) este vid şi $H_s(z) = 0$. Dacă $dx^s < 0$ atunci $t(\omega) > u_s(z)$ şi sistemul (I.2.21) are soluţii pentru

$$\max[\lambda_{s-1}, u_s(z)] \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s. \qquad (I.2.23)$$

Dacă $u_s(z) \geqslant \lambda_s$, intervalul (I.2.23) este vid şi $H_s(z) = 0$. Dacă $dx^s = 0$ şi $cx^s \geqslant z$, este evident că $H_s(z) = 0$.

Aceste rezultate confirmă prima valoare atribuită funcţiei $H_s(z)$ prin (I.2.18).

Intervalul definit de (I.2.22) este nevid dacă $u_s(z) > \lambda_{s-1}$. Se pot prezenta următoarele cazuri:

$u_s(z) \geqslant \lambda_s$ şi sistemul (I.2.21) va admite soluţii pentru $t(\omega) \in [\lambda_{s-1}, \lambda_s]$ şi $H_s(z) = T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1})$;

$u_s(z) < \lambda_s$ şi sistemul (I.2.21) va admite soluţii pentru $t(\omega) \in [\lambda_{s-1}, u_s(z))$ şi $H_s(z) = T(u_s(z)) - T(\lambda_{s-1})$.

De asemenea intervalul definit de (I.2.23) este nevid dacă $u_s(z) \leqslant \lambda_s$. Se pot prezenta situaţiile:

$u_s(z) \leqslant \lambda_{s-1}$ şi atunci sistemul (I.2.21) va admite soluţii pentru $t(\omega) \in [\lambda_{s-1}, \lambda_s]$ şi $H_s(z) = T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1})$;

$u_s(z) > \lambda_{s-1}$ şi atunci sistemul (I.2.21) va admite soluţii pentru $t(\omega) \in [u_s(z), \lambda_s]$ şi $H_s(z) = T(\lambda_s) - T(u_s(z))$.

În sfîrşit, dacă $dx^s = 0$ şi $cx^s < z$ sistemul (I.2.21) admite soluţii pentru $t(\omega) \in [\lambda_{s-1}, \lambda_s]$ şi $H_s = T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1})$. Aceste rezultate confirmă ultimele trei valori atribuite funcţiei $H_s(z)$ în (I.2.18).

În cazul general, probabilitatea ca o soluţie de bază x^s să fie soluţie optimă este dată de formula (I.2.13) şi media valorilor funcţiei obiec-

Scanned with OKEN Scanner

tiv este (I.2.14). Este uşor de văzut că pentru cazul particular în care vectorul aleator este de forma $c + t(\omega)d$

$$\mathbf{P}(x^* = x^s) = T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1}), \tag{I.2.24}$$

$$\mathbf{E}f(\omega) = \sum_{s=1}^{p} \int_{\lambda_{s-1}}^{\lambda_s} (c + \lambda d)x^s dT(\lambda). \tag{I.2.25}$$

Rezultatele obţinute pentru cazul în care vectorul aleator c este de forma $c + t(\omega)d$ sînt generalizate de B. Bereanu [3] pentru vectorul c de forma

$$c(t) = c^0 + t_1 c^1 + \ldots + t_r c^r,$$

c^i, $i = 0, \ldots, r$ fiind vectori constanţi şi $t = (t_1, \ldots, t_r)$ un vector aleator cu componente finite, absolut continuu, cu densitatea de probabilitate $f(\tau)$.

Fie T mulţimea valorilor lui t, şi $\mathcal{D}$ mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului de restricţii. Se admite că $\mathcal{D}$ este nevidă şi mărginită încît toate soluţiile de bază x^l, $l = 1, \ldots, q$ sînt finite. Se notează cu:

$$G(t) = \{\min_x c(t)x \mid x \in \mathcal{D},\ t \in T\}$$

$$\Gamma_l = \{t | c(t)x^l = G(t)\}$$

$$\Gamma_{l_\lambda} = \{t \mid t \in \Gamma_l,\ c(t)\, x^l \leqslant \lambda\}$$ λ fiind un număr real, oarecare.

Se demonstrează că

$$\mathbf{P}(t \in \Gamma_l) = \int_{\Gamma_l} f(\tau)d\tau, \quad l = 1, \ldots, q$$

$$\mathbf{P}(G(t) \leqslant \lambda) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\Gamma_{l_\lambda}} f(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{E}G(t) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\Gamma_l} (c(t)x^l) f(\tau)d\tau.$$

Să considerăm problema de programare liniară stochastică

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \max cx \end{gathered} \tag{I.2.26}$$

în care c este vector aleator cu medie $\mathbf{E}c$.

Problema de programare liniară deterministică, obținută înlocuind vectorul c prin media lui, are modelul

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \max(\mathbf{E} \cdot c)x. \end{gathered} \tag{I.2.27}$$

Fie $x^*(c)$ soluția optimă a problemei stochastice pentru un vector dat c și $x^*(\mathbf{E}c)$ soluția optimă a problemei deterministice. Vom demonstra:

Teorema V. Media valorilor funcției obiectiv într-o problemă stochastică de maximizare în care vectorul c este aleator este cel puțin egală cu valoarea funcției obiectiv a problemei deterministice în care c ia valoarea medie, adică:

$$\mathbf{E}(\max cx) \geqslant \max(\mathbf{E}c)\, x. \tag{I.2.28}$$

Demonstrație. Soluția optimă a problemei (I.2.27), $x^*(\mathbf{E}c)$ este o soluție realizabilă și pentru problema (I.2.26) deoarece ambele probleme au același sistem de restricții. $x^*(\mathbf{E}c)$ nu este în mod obligatoriu soluția optimă pentru o valoare oarecare a vectorului c încît

$$cx^*(c) \geqslant cx^*(\mathbf{E}c). \tag{I.2.29}$$

Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalității (1.2.29) putem scrie

$$\mathbf{E}[cx^*(c)] \geqslant \mathbf{E}[cx^*(\mathbf{E}c)]$$

sau

$$\mathbf{E}[cx^*(c)] \geqslant \mathbf{E}c \cdot x^*(\mathbf{E}c).$$

Această inegalitate se mai poate demonstra pe baza proprietății de convexitate a funcției $f(c)$ stabilită prin teorema III din acest paragraf. În adevăr, se știe că dacă $f(c)$ este o funcție convexă, pentru orice valoare c_0 din domeniul de definiție al funcției, există un număr $\alpha(c_0)$ astfel încît inegalitatea

$$\alpha(c_0)(c - c_0) \leqslant f(c) - f(c_0)$$

să fie satisfăcută cînd c aparține domeniului de definiție al funcției. În particular, pentru $c_0 = \mathbf{E}c$ avem

$$\alpha(\mathbf{E}c)(c - \mathbf{E}c) \leqslant f(c) - f(\mathbf{E}c).$$

Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalității, rezultă că

$$0 \leqslant \mathbf{E}f(c) - f(\mathbf{E}c)$$

sau că

$$\mathbf{E}(\max cx) \geqslant \max(\mathbf{E}c)x.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se arată că

$$\mathbf{E}(\min cx) \leqslant \min(\mathbf{E}c)x$$

Pentru verificarea inegalității stabilite se rezolvă

Exemplul IV. Să considerăm problema din exemplul I în care vectorul c este un vector aleator discret cu distribuția

$$c\begin{pmatrix}(1,\ -2) & (1,\ 3) & (2,\ -2) & (2,\ 3)\\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}28\end{pmatrix}$$

În acest caz $\mathbf{E}\max cx$ se calculează astfel:

— se rezolvă patru probleme de programare liniară deterministică cu următoarele funcții obiectiv:

$$f_1 = x_1 - 2x_2;\quad f_2 = x_1 + 3x_2;\quad f_3 = 2x_1 - 2x_2;\quad f_4 = 2x_1 + 3x_2;$$

— se calculează media valorilor maxime ale funcțiilor $f_1\, f_2\, f_3\, f_4$. Reamintind că vîrfurile poligonului soluțiilor realizabile sînt

$$A(2,\ 0);\ B(0,\ 3);\ C(1,\ 6);\ D(7,\ 8),$$

se deduce cu ușurință că

$$\max f_1 = f_1(A) = 2;\qquad \max f_2 = f_2(D) = 31;\qquad \max f_3 = f_3(A) = 4;$$
$$\max f_4 = f_4(D) = 38,$$

încît avem

$$\mathbf{E}\max cx = 0{,}18 \times 2 + 0{,}12 \times 31 + 0{,}42 \times 4 + 0{,}28 \times 38 = 16{,}40.$$

Pentru a calcula $\max(\mathbf{E}c)x$ se rezolvă problema cu funcția obiectiv

$$f = 1{,}70x_1$$

deoarece $\mathbf{E}c_1 = 1{,}70$ și $\mathbf{E}c_2 = 0$. Avem

$$\max f = f(\mathrm{D}) = 11{,}90.$$

Rezultatele găsite confirmă inegalitatea (I.2.28) care se mai poate scrie și sub forma

$$\mathbf{E}cf(b,c) \geqslant f(b,\ \mathbf{E}c) \qquad \text{(I.2.30)}$$

dacă se notează

$\mathbf{E}c$ media referitoare la distribuția elementului aleator c,

$$f(b,c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$
$$f(b,\ \mathbf{E}c) = \{\max(\mathbf{E}c)x \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza exemplului IV se ajunge la concluzia că marginea inferioară $\mathbf{E}cf(b,c)$ calculată rezolvînd problema deterministică nu oferă informaţii satisfăcătoare. Distribuţia vectorului c, din exemplul IV, induce următoarea lege de probabilitate pe mulţimea vîrfurilor poligonului ABCD

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}60 \quad \mathbf{P}(D) = 0{,}40$$

dacă $\mathbf{P}(A)$ şi $\mathbf{P}(D)$ înseamnă probabilitatea ca vîrful A, respectiv D să fie optimale. Aceasta ne îndreptăţeşte să afirmăm că valoarea optimă a funcţiei obiectiv este 2 sau 4 cu o probabilitate de 60 %.

Să presupunem că planificatorul adoptă ca plan de producţie vectorul x_A adică $x_1 = 2$; $x_2 = 0$. Distribuţia funcţiei cx_A este atunci

$$cx_A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}28 \end{pmatrix}.$$

Calculînd valoarea medie şi dispersia acestei variabile aleatoare găsim

$$\mathbf{E}(cx_A) = 0{,}36 + 0{,}24 + 1{,}68 + 1{,}12 = 3{,}40$$

$$\mathbf{D}(cx_A) = 0{,}72 + 0{,}48 + 6{,}72 + 4{,}48 - 11{,}56 = 0{,}84.$$

Dacă se adoptă ca plan de producţie vectorul x_D adică $x_1 = 7$, $x_2 = 8$ se obţine pentru cx_D distribuţia

$$cx_D \begin{pmatrix} -9 & 31 & -2 & 38 \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$

încît avem

$$\mathbf{E}(cx_D) = -1{,}62 + 3{,}72 - 0{,}84 + 10{,}64 = 11{,}90$$

$$\mathbf{D}(cx_D) = 14{,}58 + 115{,}32 + 1{,}68 + 404{,}32 - 141{,}61 = 394{,}29.$$

Din aceste calcule se desprinde concluzia că planificatorul poate obţine un beneficiu mediu de 3,40, dispersia valorilor funcţiei obiectiv fiind 0,84, dacă adoptă planul de producţie $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ sau poate obţine beneficiul mediu de 11,90 adoptînd planul de producţie $x_1 = 7$, $x_2 = 8$ dar, în acest caz, riscul de a nu realiza acest beneficiu este mult mai mare deoarece dispersia pentru cx_D este 394,29.

Din cele de mai sus se ajunge la concluzia că în problemele de planificare cu costuri aleatoare este insuficient să se cunoască valoarea medie a beneficiului maxim care se poate realiza sau valoarea medie a costului minim. O informaţie mai completă necesită un calcul care să stabilească riscul pe care şi-l asumă planificatorul adoptînd o anumită soluţie. Funcţia de risc poate fi aleasă în strînsă legătură cu

Scanned with OKEN Scanner

condiţiile de producţie şi de desfacere ale mărfurilor. În multe probleme funcţia de risc poate fi dispersia funcţiei $(\mathbf{E}c)x$ sau a funcţiei $\sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j$.

Presupunem că preţurile unitare c_j sînt independente de cantităţile produse x_j. Fie σ_j^2 dispersia preţului c_j şi σ_{jk} covarianţa preţurilor c_j şi c_k. Notînd cu ρ_{jk}; $-1 \leqslant \rho_{jk} \leqslant +1$ coeficientul de corelaţie, avem

$$\sigma_{jk} = \sigma_j \sigma_k \rho_{jk}.$$

Dispersia produsului $c_j x_j$ este $x_j^2 \sigma_j^2$ şi covarianţa dintre $c_j x_j$ şi $c_k x_k$ este $x_j x_k \sigma_{jk}$ încît dispersia costului mediu total $\sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j$ este

$$V = \mathbf{E}\left(\sum_j c_j x_j - \sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k \sigma_{jk}; \quad \sigma_{jj} = \sigma_j^2.$$

Se poate considera ca soluţie optimă vectorul x care realizează minimum funcţiei V pe mulţimea soluţiilor realizabile ale problemei. Determinarea soluţiei optime comportă în acest caz rezolvarea unui program cu restricţii liniare şi funcţia obiectiv pătratică.

Dacă toate preţurile sînt înalt corelate încît toţi ρ_{jk} pot fi consideraţi practic egali cu 1, atunci $\sigma_{jk} = \sigma_j \sigma_k$ şi

$$V = \sum_{j=1}^{n} (x_j \sigma_j)^2.$$

Deoarece $V^{1/2} \leqslant \sum_j x_j \sigma_j$ problema de programare neliniară care determină dispersia minimă poate fi înlocuită cu problema de programare liniară a cărei obiectiv este minimizarea funcţiei

$$V_1 = \sum_j x_j \sigma_j$$

pe mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului de restricţii şi cu condiţia

$$\sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j \{\leqslant \text{ sau } \geqslant\} \lambda$$

unde λ este un parametru care constituie o margine superioară a costului mediu total în problemele de minimizare sau o margine inferioară a beneficiului mediu total în problemele de maximizare.

Dacă toate preţurile c_j sînt variabile aleatoare independente atunci toţi coeficienţii de corelaţie ρ_{jk} sînt nuli încît V este de forma

$$V_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Minimizarea funcției V_2 pe mulțimea soluțiilor realizabile ale sistemului de restricții pentru care

$$\sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j \ \{\leqslant \text{ sau } \geqslant\}\lambda$$

constituie o problemă de programare pătratică cu restricții depinzînd de un parametru. G. B. Dantzig [15] recomandă înlocuirea funcției V_2 prin

$$V_3 = \sum_j x_j^2\sigma_j^2 + k\lambda, \text{ unde } \sum_j (\mathbf{E}c_j)x_j \leqslant \lambda.$$

Urmează apoi să se rezolve problema parametric în raport cu $k\,(k \geqslant 0)$, pornind de la $k = 0$. Soluțiile vor genera diferite perechi (V_3, λ) din care se va putea alege cea care corespunde în cea mai mare măsură scopului urmărit.

Exemplul V. Pentru furajarea unei categorii de animale se pot folosi nutrețurile F_j, $j=1, \ldots, 5$. Conținutul de substanțe nutritive P_i $i = 1, 2, 3$, cantitățile minime necesare pentru asigurarea unei alimentații raționale și prețurile furajelor sînt conținute în tabelul următor.

(5)

Furaje / Principii nutritive	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	Necesarul
P_1	3	2	1	1	3	96
P_2	2	4	2	1	2	80
P_3	3	3	1	2	2	101
Prețurile unitare	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	

Prețurile nu sînt cunoscute în momentul în care trebuie determinată rația optimă adică amestecul de furaje care satisface condițiile impuse și corespunde costului minim. Se știe că prețurile sînt variabile aleatoare cu distribuții normale, de asemenea, se cunosc prețurile medii și, cu o probabilitate de 99,99%, intervalele în care pot varia aceste prețuri. Pe baza acestor informații se vor calcula dispersiile.

Scanned with OKEN Scanner

Să admitem că avem

pentru $c_1 : m_1 = 3{,}25$; $c_1 \in [2{,}27 ; 4{,}23]$ încît $\sigma_1 = 0{,}25$
,, $c_2 : m_2 = 4{,}50$; $c_2 \in [3{,}92 ; 5{,}08]$,, $\sigma_2 = 0{,}15$
,, $c_3 : m_3 = 2$; $c_3 \in [0{,}83 : 3{,}17]$,, $\sigma_3 = 0{,}30$
,, $c_4 : m_4 = 1{,}80$; $c_4 \in [0{,}50 ; 3{,}10]$,, $\sigma_4 = 0{,}34$
,, $c_5 : m_5 = 3$; $c_5 \in [2{,}15 ; 3{,}85]$,, $\sigma_5 = 0{,}22$.

Notînd cu x_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$ cantităţile de furaje F_j $j=1, \ldots, 5$ care constituie raţia, modelul matematic pentru determinarea raţiei optime este

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &\geqslant 96 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &\geqslant 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &\geqslant 101 \\ x_j \geqslant 0 \qquad j &= 1, \ldots, 5 \end{aligned} \tag{I.2.31}$$

$$\min \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

Să admitem că preţurile c_j nu depind de cantităţile care trebuie procurate pentru a asigura hrana animalelor şi că toate aceste preţuri sînt înalt corelate. Costul mediu al raţiei furajere optime se calculează înlocuind funcţia obiectiv din modelul (I.2.31) prin

$$\min \sum_{j=1}^{5} (\mathbf{E}c_j) x_j = \min (3{,}25x_1 + 4{,}50x_2 + 2x_3 + 1{,}80x_4 + 3x_5).$$

Soluţia optimă este $x_1 = 26{,}75$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10{,}75$; $x_4 = 5$; $x_5 = 0$ şi costul mediu al raţiei furajere optime este de 117, 4375 unităţi băneşti.

În condiţiile problemei examinate, dispersia funcţiei $\sum_{j=1}^{5} (\mathbf{E}c_j) x_j$ se studiază pe modelul

$$\begin{aligned} 3 \quad x_1 + 2 \quad x_2 + x_3 + \quad x_4 + 3x_5 &\geqslant 96 \\ 2 \quad x_1 + 4 \quad x_2 + 2x_3 + \quad x_4 + 2x_5 &\geqslant 80 \\ 3 \quad x_1 + 3 \quad x_2 + x_3 + 2 \quad x_4 + 2x_5 &\geqslant 101 \\ 3{,}25x_1 + 4{,}50x_2 + 2x_3 + 1{,}80x_4 + 3x_5 &\leqslant \lambda \\ x_j \geqslant 0 \qquad j &= 1, \ldots, 5 \end{aligned} \tag{I.2.32}$$

$$\min(0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}34x_4 + 0{,}22x_5).$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie η_i; $i = 1, \ldots, 4$ variabilele care se adaugă pentru transformarea inecuaţiilor în ecuaţii şi M coeficienţii variabilelor η_1, η_2 şi η_3 în funcţia obiectiv. Folosind algoritmul simplex, după patru iteraţii se obţine baza optimă pentru $\lambda \geqslant 117{,}75$. Din tabelul 6 care redă iteraţia a patra, rezultă că soluţia optimă este $x_1 = 27$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Se ştie că

$$V^{1/2} \leqslant 0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}34x_4 + 0{,}22x_5$$

încît, pentru această soluţie, min $V^{1/2} \leqslant 7{,}87$.

(6)

c_3	c_j		0,25	0,15	0,30	0,34	0,22	0
	Baza	Constante	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	η_4
0,22	x_5	1			$^1/_2$	$-\,^7/_8$	1	
0,15	x_2	6		1	$^1/_2$	$^1/_8$		
0,25	x_1	27	1		$-\,^1/_2$	$^9/_8$		
0	η_4	$\lambda - 117{,}75$			$-\,^3/_8$	$^{1,65}/_8$		1
		7,87	0	0	$-\,^{1,69}/_4$	$-\,^{0,93}/_4$	0	0

Baza optimă pentru $\lambda < 117{,}75$ se obţine folosind algoritmul simplex dual. Rezultatele sînt următoarele:

(7)

Intervalele de optimalitate	Soluţia				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\lambda \geqslant 117{,}75$	27	6	0	0	1
$117 \leqslant \lambda \leqslant 117{,}75$	$\frac{4}{3}(138 - \lambda)$	$\frac{4}{3}(\lambda\text{-}113{,}25)$	$\frac{8}{3}(117{,}75\text{-}\lambda)$	0	$\frac{4}{3}(\lambda - 117)$
$114{,}75 \leqslant \lambda \leqslant 117$	$\frac{20}{9}(0{,}25\lambda - -16{,}65)$	$\frac{20}{9}(\lambda - 114{,}75)$	$\frac{20}{9}(205{,}65 - -1{,}75\lambda)$	$\frac{20}{9}(117 - \lambda)$	0

Pentru valorile parametrului mai mici decît 114,75 nu se mai poate face schimbarea bazei ceea ce înseamnă că nu se poate obţine o raţie furajeră care să conţină principiile nutritive în cantităţile cerute la un cost mediu mai mic decît 114,75 unităţi monetare.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$V^{1/2} \leqslant 0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}30x_{36} + 0{,}34x_4 + 0{,}22x_5$$

rezultatele obținute din rezolvarea modelului (I.2.32) arată că

$\min V^{1/2} \leqslant 7{,}87$ pentru $\lambda \geqslant 117{,}75$

$\min V^{1/2} \leqslant 83{,}23 - 0{,}64\lambda$ pentru $117 \leqslant \lambda \leqslant 117{,}75$

$\min V^{1/2} \leqslant 178 - 1{,}45\lambda$ pentru $114{,}75 \leqslant \lambda \leqslant 117.$

Dacă se acceptă soluția care minimizează costul mediu, $V^{1/2} \leqslant 11{,}6125$. Acceptînd soluția $x_1 = 28$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$ pentru care $\sum_{j=1}^{5} (\mathbf{E}c_j)x_j = 117{,}50$ avem $V^{1/2} \leqslant 8{,}35$; pentru soluția $x_1 = 27$; $x_2 = 6$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 1$ avem $\sum_{j=1}^{5} (\mathbf{E}c_j)x_j = 117{,}75$ și $V^{1/2} \leqslant 7{,}87$. În concluzie, se constată că acceptînd o soluție care conduce la un cost mediu mai ridicat, riscul de a depăși acest cost scade.

Presupunînd că prețurile c_j sînt independente, dispersia funcției $\sum_{j=1}^{5} (\mathbf{E}c_j)x_j$ este

$$V = 0{,}0625\,x_1^2 + 0{,}0225\,x_2^2 + 0{,}09\,x_3^2 + 0{,}1156\,x_4^2 + 0{,}0484\,x_5^2. \quad \text{(I.2.33)}$$

Problema de programare pătratică cu restricțiile (I.2.32) și funcția obiectiv (I.2.33) se rezolvă mai ușor minimizînd funcția

$$\varphi(x,k) = 0{,}0625\,x_1^2 + 0{,}0225\,x_2^2 + 0{,}09\,x_3^2 + 0{,}1156\,x_4^2 + 0{,}0484\,x_5^2 + k(3{,}25\,x_1 + 4{,}50\,x_2 + 2\,x_3 + 1{,}80\,x_4 + 3\,x_5)$$

pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &\geqslant 96 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &\geqslant 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &\geqslant 101 \\ x_j \geqslant 0,\ j &= 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Se rezolvă problema pentru $k = 0$ și apoi se determină valoarea critică $k = k_1$ a parametrului pentru care soluția găsită încetează de a mai fi optimă. Minimizînd apoi funcția $\varphi(x,k_1)$ se obține o nouă soluție optimă și se determină valoarea critică $k = k_2$ etc.

Să presupunem acum că prețurile furajelor F_1, F_2, F_4 nu se influențează reciproc și că sînt independente și de celelalte iar pentru

Scanned with OKEN Scanner

prețurile furajelor F_3, F_5 coeficientul de corelație este $\rho_{35} = 0{,}2$. În aceste condiții toți σ_{ik} sînt nuli cu excepția coeficientului de corelație $\sigma_{3,5}$ care are valoarea

$$\sigma_{3,5} = \sigma_3 \cdot \sigma_5 \cdot \rho_{3,5} = 0{,}30 \times 0{,}22 \times 0{,}2 = 0{,}132.$$

Studiul dispersiei în cazul acesta constă în minimizarea funcției

$$V = 0{,}0625\, x_1^2 + 0{,}0225\, x_2^2 + 0{,}09\, x_3^2 + 0{,}1156\, x_4^2 + 0{,}0484\, x_5^2 + 0{,}132\, x_3 x_5$$

pe mulțimea soluțiilor sistemului (I.2.32).

În problemele de programări cu funcția economică stochastică, poate prezenta interes următorul gen de informație:

A. Care este probabilitatea ca valorile funcției economice cx să depășească sau să rămînă inferioare unei valori determinate. Vom încerca să discernem sensul economic al unei astfel de informații. În acest scop să presupunem că funcția economică reprezintă beneficiul care se poate realiza făcînd o alegere între diferite activități iar în cadrul fiecăreia alegînd un anumit nivel al producției. Dacă întreprinderea dorește să-și asigure un beneficiu cel puțin egal cu S, este interesant de știut care este probabilitatea de a fi realizat. În probleme de minim, de exemplu, de determinare a rațiilor furajere optime, planificatorul poate fi interesat să știe care este probabilitatea ca o anumită sumă de bani să-i asigure aprovizionarea cu furaje pentru o perioadă determinată.

B. Care este cea mai mare sau cea mai mică valoare pe care o poate lua funcția economică, cu o probabilitate dată, în condițiile problemei. Aceasta necesită să se determine, pentru o valoare dată α, cel mai mare λ pentru care

$$\mathbf{P}(cx > \lambda) = \alpha \quad \text{cînd } x \in \mathcal{D}$$

sau

$$\mathbf{P}(cx < \lambda) = \alpha \quad \text{cînd } x \in \mathcal{D}.$$

O altă informație constă în a găsi

C. Valoarea parametrului λ care, cu certitudine, constituie o margine superioară sau inferioară a valorilor optime ale funcției obiectiv în condițiile problemei, adică acel $\lambda = \lambda^*$ pentru care este satisfăcută condiția

$$\mathbf{P}[\min cx \leqslant \lambda^* \mid x \in \mathcal{D}] = 1$$

sau

$$\mathbf{P}[\max cx \geqslant \lambda^* \mid x \in \mathcal{D}] = 1$$

unde prin $\mathcal{D}$ s-a notat mulțimea soluțiilor realizabile ale sistemului de restricții. În sens economic λ^*, pentru probleme de minim, este

Scanned with OKEN Scanner

suma care asigură cu certitudine acoperirea cheltuielilor, iar în probleme de maxim, beneficiul cert.

Înainte de a analiza aceste probleme vom demonstra

Teorema VI. Fie dat sistemul de inegalităţi

$$Ax \leqslant b \tag{I.2.34}$$
$$x \geqslant 0$$

şi funcţia economică

$$cx \tag{I.2.35}$$

în care c este o variabilă aleatoare discretă, cu un număr finit de valori c^k, $k = 1, \ldots, r$ conţinute într-un dreptunghi n-dimensional adică

$$-\infty < c^k_{j_2} \leqslant c^k_j \leqslant c^k_{j_1} < +\infty, \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, r.$$

Fie $\mathcal{D}$ mulţimea soluţiilor sistemului (I.2.34) şi

$$F(x;\ \lambda) = \mathbf{P}(cx \geqslant \lambda). \tag{I.2.36}$$

Pentru orice valoare determinată λ^* a parametrului λ există o partiţie finită

$$\pi(\lambda^*) = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_s\} \tag{I.2.37}$$

a mulţimii $\mathcal{D}$, astfel încît $F(x;\ \lambda^*)$ este constant pentru orice $x \in \mathcal{D}_l$, $l = 1, \ldots, s$.

Demonstraţie. Fie

$$\begin{pmatrix} c^1, & c^2, & \ldots, & c^r \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_r \end{pmatrix}$$

distribuţia vectorului aleator c şi $H_1, H_2, \ldots, H_r$ hiperplanele

$$c^1x = \lambda^*;\quad c^2x = \lambda^*;\ \ldots;\ c^rx = \lambda^*.$$

Hiperplanul H_1 determină în $\mathcal{D}$ submulţimile

$$\mathcal{D}_{1,1} = \{\mathcal{D} \cap c^1x > \lambda^*\};\quad \mathcal{D}_{1,2} = \{\mathcal{D} \cap c^1x < \lambda^*\};\quad \mathcal{D}_{1,3} = \{\mathcal{D} \cap H_1\}$$

Este evident că

$$\mathcal{D}_{1,1} \cup \mathcal{D}_{1,2} \cup \mathcal{D}_{1,3} = \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}_{1,1} \cap \mathcal{D}_{1,2} = \emptyset;\quad \mathcal{D}_{1,1} \cap \mathcal{D}_{1,3} = \emptyset;\quad \mathcal{D}_{1,2} \cap \mathcal{D}_{1,3} = \emptyset$$

Scanned with OKEN Scanner

încît $\{\mathcal{D}_{1,1}; \mathcal{D}_{1,2}; \mathcal{D}_{1,3}\}$ este partiția determinată în $\mathcal{D}$ de H_1. Considerînd acum hiperlanul H_2, putem defini mulțimile

$$\mathcal{D}_{2,1} = \{\mathcal{D}_{1,1} \cap c^2x > \lambda^*\}; \quad \mathcal{D}_{2,2} = \{\mathcal{D}_{1,2} \cap c^2x > \lambda^*\};$$
$$\mathcal{D}_{2,3} = \{\mathcal{D}_{1,3} \cap c^2x > \lambda^*\};$$
$$\mathcal{D}_{2,4} = \{\mathcal{D}_{1,1} \cap c^2x < \lambda^*\}; \quad \mathcal{D}_{2,5} = \{\mathcal{D}_{1,2} \cap c^2x < \lambda^*\};$$
$$\mathcal{D}_{2,6} = \{\mathcal{D}_{1,3} \cap c^2x < \lambda^*\};$$
$$\mathcal{D}_{2,7} = \{\mathcal{D}_{1,1} \cap H_2\}; \quad \mathcal{D}_{2,8} = \{\mathcal{D}_{1,2} \cap H_2\}; \quad \mathcal{D}_{2,9} = \{\mathcal{D}_{1,3} \cap H_2\},$$

care constituie partiția determinată în $\mathcal{D}$ de H_1 și H_2 etc. Dacă $H_2 \cap \mathcal{D} = \emptyset$, partiția determinată în $\mathcal{D}$ de H_1 și H_2 este identică cu cea determinată de H_1. Deoarece numărul hiperplanelor H_k este finit, partiția $\pi(\lambda^*)$ determinată de aceste hiperplane în $\mathcal{D}$ este finită.

Fie x^* un element din $\mathcal{D}$. Punctul x^* aparține unei anumite submulțimi a partiției $\pi(\lambda^*)$. Să admitem că $x^* \in \mathcal{D}_l$ și că $\mathcal{D}_l$ se găsește în semispațiile

$$\begin{aligned} &c^{j_1} x > \lambda^*, \ \ldots, \ c^{j_t} x > \lambda^* \\ &c^{j_{t+1}} x = \lambda^*, \ \ldots, \ c^{j_r} x = \lambda^* \\ &c^{j_{r+1}} x < \lambda^*, \ \ldots, \ c^{j_s} x < \lambda^* \\ &\{j_1, \ \ldots, \ j_s\} \equiv \{1, \ \ldots, \ s\} \end{aligned} \tag{I.2.38}$$

În acest caz pentru orice $x \in \mathcal{D}_l$ avem

$$\mathbf{P}\{cx > \lambda^* \mid x \in \mathcal{D}_l\} = \mathbf{P}\{c \in \bigcup_{i=1}^{t} c^{j_i}\} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{P}(c = c^{j_i}) = \sum_{i=1}^{t} p_{j_i}$$

ceea ce dovedește că $F(x,\lambda^*)$ ia aceeași valoare pentru orice $x \in \mathcal{D}_l$ $l = 1, \ldots, s$. Dacă c este o variabilă aleatoare continuă cu valori într-un interval finit $[\underline{c}, \bar{c}]$ se poate obține o partiție a mulțimii $\mathcal{D}$ alegînd o diviziune

$$\underline{c} = c_1 < c_2 < \ldots < c_s = \bar{c}$$

a intervalului $[\underline{c}, \bar{c}]$. Dacă $\varphi(c)$ este funcția densitate de probabilitate a variabilei c și $x \in \mathcal{D}_l$ satisface condițiile (I.2.38) atunci

$$\mathbf{P}(cx > \lambda^*, \ x \in D_l) = \sum_{i=1}^{t} \int_{c_{j_i}}^{c_{j_i+1}} \varphi(c)dc.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul VI. Fie dat sistemul de inecuaţii

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 6 \\ 8x_1 - 5x_2 &\leqslant 16 \\ -x_1 + 3x_2 &\leqslant 17 \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(I.2.39)}$$

şi funcţia economică

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

în care vectorul aleator c, are distribuţia

$$c\begin{pmatrix} c^1 = (1,-2) & c^2 = (1,3) & c^3 = (2,-2) & c^4 = (-1,1) \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$

Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului (I.2.39) pentru care $\mathbf{P}(cx > 3)$ este maximă.

Mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului (I.2.39) este reprezentată în fig. 5 prin mulţimea punctelor poligonului ABCD. Funcţia

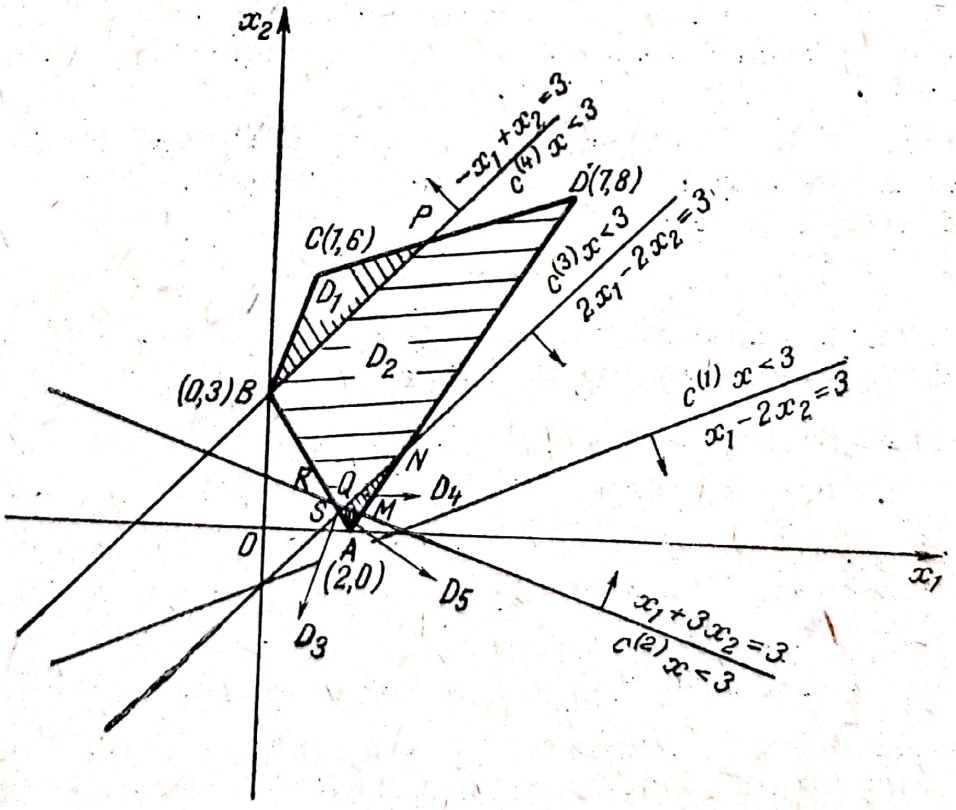

Fig. 5

$cx = 3$ pentru diferitele valori pe care le poate lua vectorul aleator c, devine

$$x_1 - 2x_2 = 3; \quad x_1 + 3x_2 = 3; \quad 2x_1 - 2x_2 = 3; \quad -x_1 + x_2 = 3.$$

Reprezentînd aceste drepte în fig. 5 se obţine o partiţie a mulţimii soluţiilor realizabile ABCD, pe care o notăm cu $\pi(3) = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5)$ unde

$$\mathcal{D}_1 \equiv \text{BPC}; \quad \mathcal{D}_2 \equiv \text{BPDNQR}; \quad \mathcal{D}_3 \equiv \text{RQS}; \quad \mathcal{D}_4 \equiv \text{QNM};$$
$$\mathcal{D}_5 \equiv \text{QMAS}$$

dacă $x \in \mathcal{D}_1$, $cx > 3$ cînd $c = c_2 \cup c_4$ încît $\mathbf{P}(cx \geqslant 3 | x \in \mathcal{D}_1) = \mathbf{P}(c_2) + \mathbf{P}(c_4) = 0{,}40$;

dacă $x \in \mathcal{D}_2$, $\mathbf{P}(cx \geqslant 3) = \mathbf{P}(c = c_2) = 0{,}12$;
dacă $x \in \mathcal{D}_3$, $\mathbf{P}(cx \geqslant 3) = 0$;
dacă $x \in \mathcal{D}_4$, $\mathbf{P}(cx \geqslant 3) = \mathbf{P}(c = c_2 \cup c_3) = 0{,}54$;
dacă $x \in \mathcal{D}_5$, $\mathbf{P}(cx \geqslant 3) = \mathbf{P}(c = c_3) = 0{,}42$.

Din aceste rezultate deducem că, pentru orice plan de producţie realizabil cu excepţia celor care constituie mulţimea RQS se poate asigura, cu o probabilitate cunoscută, un cîştig mai mare decît 3. Probabilitatea cea mai mare este 0,54 şi cîştigul de 3 unităţi este asigurat cu probabilitatea de 54% dacă planul de producţie este un element al mulţimii $\mathcal{D}_4 = \text{QNM}$.

Exemplul VII. Să se determine probabilitatea maximă de a obţine un cîştig pozitiv în problema precedentă.
Pentru a stabili care este

$$\max \mathbf{P}(cx > 0)$$

se determină partiţia $\pi(0)$ a mulţimii $\mathcal{D}$. Din fig. 6 în care este reprezentat $\mathcal{D} = \text{ABCD}$ şi dreptele

$$x_1 - 2x_2 = 0; \quad x_1 + 3x_2 = 0; \quad 2x_1 - 2x_2 = 0; \quad -x_1 + x_2 = 0,$$

rezultă că $\pi(0) = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$; $\mathcal{D}_1 = \text{BCDMN}$; $\mathcal{D}_2 = \text{NMPQ}$; $\mathcal{D}_3 = \text{QPA}$

pentru $x \in \mathcal{D}_1$, $\mathbf{P}(cx > 0) = \mathbf{P}(c = c_2 \cup c_4) = 0{,}40$;
pentru $x \in \mathcal{D}_2$, $\mathbf{P}(cx > 0) = \mathbf{P}(c = c_2 \cup c_3) = 0{,}54$;
pentru $x \in \mathcal{D}_3$, $\mathbf{P}(cx > 0) = \mathbf{P}(c = c_1 \cup c_2 \cup c_3) = 0{,}72$.

Probabilitatea cea mai mare de a obţine un cîştig pozitiv este de 72%. Pentru a asigura un cîştig pozitiv cu această probabilitate trebuie ales un plan de producţie care aparţine lui $\mathcal{D}_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul VIII. Care este cel mai mare cîştig ce se poate asigura cu o probabilitate de 72% în condiţiile din exemplul precedent? Întrebarea pusă cere determinarea celei mai mari valori a parametrului λ pentru care este satisfăcută condiţia

$$\mathbf{P}(cx \geqslant \lambda) = 0{,}72.$$

Am văzut că pentru $x \in \mathcal{D}_3$, $\mathbf{P}(cx \geqslant 0) = 0{,}72$. Pentru $\lambda > 0$ ecuaţiile $x_1 + 3x_2 = \lambda$, $x_1 - 2x_2 = \lambda$, $2x_1 - 2x_2 = \lambda$ reprezintă drepte res-

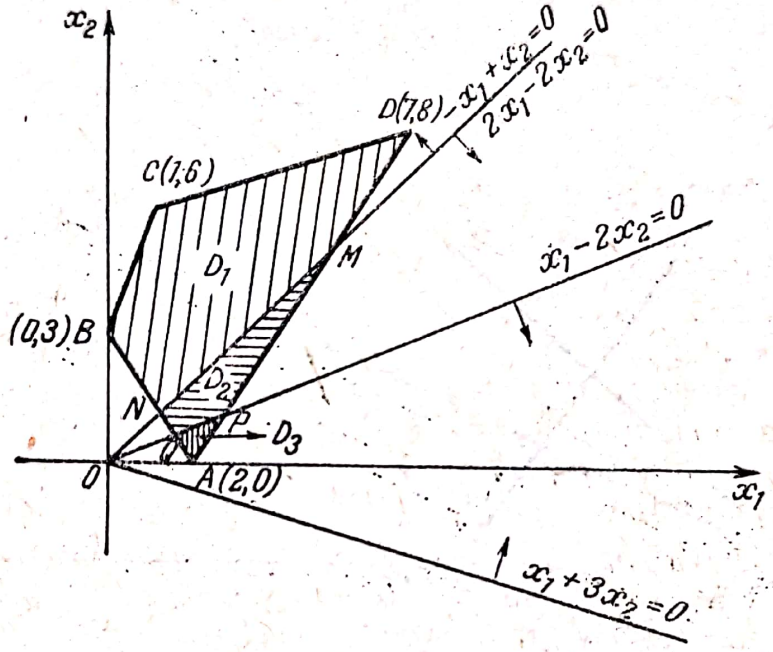

Fig. 6.

pectiv paralele cu $x_1 + 3x_2 = 0$, $x_1 - 2x_2 = 0$, $2x_1 - 2x_2 = 0$. Cînd λ creşte $\mathcal{D}_3$ se micşorează. Valoarea maximă pentru λ se obţine cînd $\mathcal{D}_3$ se reduce la un singur element. Din fig. 7 se poate deduce că acest element este punctul de intersecţie al dreptelor:

$$3x_1 + 2x_2 = 6\,; \quad x_1 + 3x_2 = \lambda\,; \quad x_1 - 2x_2 = \lambda.$$

Valoarea parametrului λ pentru care aceste drepte sînt concurente este $\lambda = 2$ şi atunci $\mathcal{D}_3$ se reduce punctul A(2,0). În concluzie, adoptînd planul de producţie $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ se asigură un cîştig de cel puţin 2 unităţi cu o probabilitate de 72%.

Ca o verificare a acestui rezultat se pot calcula valorile funcţiei

Scanned with OKEN Scanner

economice pentru cx în punctul A(2,0) cînd c ia toate valorile admisibile. Găsim

$$\begin{array}{lll} c^1 = (1,-2) & f_1 = 2 & p_1 = 0{,}18 \\ c^2 = (1,\ 3) & f_2 = 2 & p_2 = 0{,}12 \\ c^3 = (2,-2) & f_3 = 4 & p_3 = 0{,}42 \\ c^4 = (-1,\ 1) & f_4 = -2 & p_4 = 0{,}28 \end{array}$$

încît $\mathbf{P}(cx \geqslant 2) = 0{,}72$ cînd $x \in$.

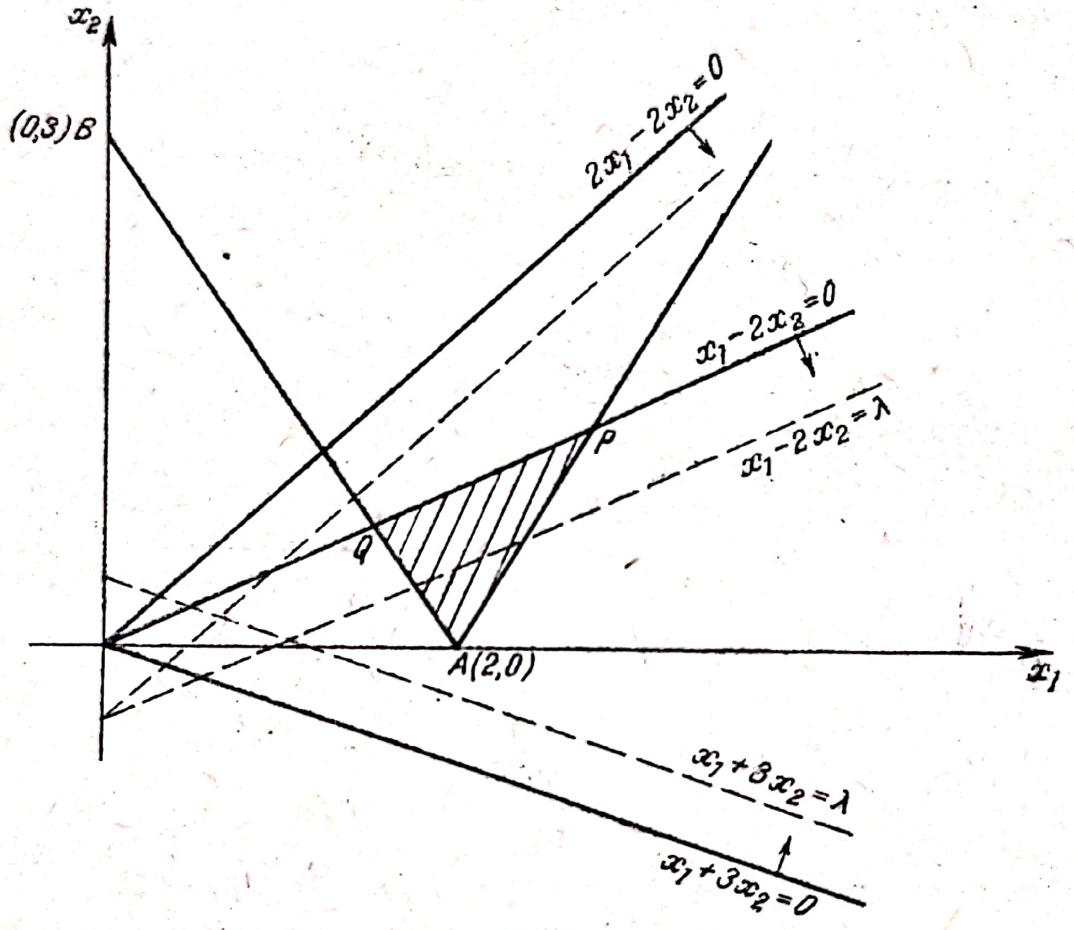

Fig. 7

Să admitem acum că în problema de programare liniară cu funcţia economică stochastică

$$Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 \qquad \text{opt } cx$$

este interesantă informaţia

$$\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda) = \alpha.$$

Această informaţie include doi parametri λ şi α. Fiind dat unul din ei vom căuta posibilitatea de a-l determina pe celălalt. Fie dat $\lambda = \lambda^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a preciza ideile să presupunem că se discută o problemă de raţie furajeră deci că funcţia economică cx reprezintă cheltuielile necesare pentru furajarea unui animal. În acest caz λ^* este o sumă de bani care nu trebuie depăşită cînd se alege combinaţia de furaje necesară pentru asigurarea unei alimentaţii corespunzătoare cerinţelor. S-a arătat că, în condiţiile teoremei VI, hiperplanele H_k, $c^k x = \lambda^*$, $k = 1, \ldots, s$ determină o partiţie $\pi(\lambda^*)$ a mulţimii soluţiilor realizabile $\mathcal{D}$ şi că $\mathbf{P}(cx \geqslant \lambda^*)$ sau $\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda^*)$ sînt constante pe fiecare element al partiţiei. În problema de furajare şi în general într-o problemă de minimizare va interesa determinarea elementului $\mathcal{D}_t$ al partiţiei $\pi(\lambda^*)$ pentru care $\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda^*)$ ia cea mai mare valoare. Vom numi *regiuni de decizie* elementele partiţiei $\pi(\lambda^*)$. Astfel problema constă în determinarea regiunii de decizie $\mathcal{D}_{opt}$ pe care $\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda^*)$ este maximă. O regiune de decizie este mulţimea soluţiilor unui sistem de forma

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant b \\ C_1 x &\geqslant \lambda^* \\ C_2 x &\leqslant \lambda^* \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(I.2.40)}$$

unde s-a notat cu C_1 matricea formată din vectorii $c^{j_1}, \ldots, c^{j_t}$ şi cu C_2 matricea $c^{j_{t+1}}, \ldots, c^{j_s}$, $\{j_1, \ldots, j_s\} \equiv \{1, \ldots, s\}$.

Se ştie că pe regiunea de decizie $\mathcal{D}_t$ determinată de condiţiile (I.2.40) avem

$$\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda^*) = \mathbf{P}(c \in C_2) = \sum_{k=t+1}^{s} p_{jk}$$

Se pun două întrebări:

— cum trebuie alese matricele C_1 şi C_2 pentru ca $\mathcal{D}_t$ să fie $\mathcal{D}_{opt}$,

— cum se poate şti că o regiune de decizie nu este vidă?

Deoarece prin definiţie $\mathcal{D}_{opt}$ corespunde celei mai mari valori a parametrului α şi $\max \alpha = 1$, $\mathcal{D}_{opt}$ este regiunea definită de

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant b \\ Cx &\leqslant \lambda^* \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(I.2.41)}$$

unde C este matricea formată din toate valorile pe care le ia vectorul aleator c, dacă această regiune nu este vidă adică dacă sistemul (I.2.41) este compatibil. În caz contrar, să presupunem că valorile c^s $s = 1, \ldots, r$ ale vectorului c s-au renumerotat astfel încît proba-

Scanned with OKEN Scanner

bilităţile corespunzătoare, p_s, $s = 1, \ldots, r$ să formeze un şir crescător.

Fie

$$\alpha_i = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{r} p_s \qquad i = 1, \ldots, r$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^{r} p_s \qquad i,j = 1, \ldots, r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Şirul format de α_i, α_{ij}, ... conţine $2^r - 2$ termeni.

Se ordonează mulţimea de numere $\{\alpha_i, \alpha_{ij}, \ldots\}$ într-un şir crescător

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2^r-2}\} \tag{I.1.42}$$

Dacă un β_l este de forma $\beta_l = \alpha_{ijk} \ldots$, îi ataşăm sistemul

$$\begin{array}{ll} Ax \leqslant b & \\ c^s x \leqslant \lambda^* & s = 1,2,\ldots,r, \text{ dar} \\ x \geqslant 0 & s \neq i, j, k, \ldots \end{array} \tag{I.1.43}$$

Se cercetează dacă sistemele ataşate lui β_1, β_2, β_3, ... sînt compatibile. Primul sistem compatibil (în această ordine) corespunde lui $\mathcal{D}_{opt}$. Acest procedeu poate cere studiul compatibilităţii a $2^r - 2$ sisteme de inecuaţii deci un mare volum de muncă. Numărul încercărilor poate fi considerabil redus folosind informaţiile care se obţin rezolvînd problema de programare liniară

$$\begin{array}{l} Ax + y \qquad = b \\ Cx + z - \zeta = \lambda^* \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0;\ \zeta \geqslant 0 \\ \min \sum_i z_i \end{array} \tag{I.2.44}$$

în care y este un vector m-dimensional; z şi ζ sînt vectori r-dimensionali. Deoarece $z \geqslant 0$, $\min \Sigma z_i$ poate fi nul sau pozitiv.

Dacă $\min \Sigma z_i = 0$ se pot prezenta următoarele situaţii:

— soluţia optimă nu conţine nici o componentă pozitivă a vectorului ζ; atunci rezolvarea problemei a condus la determinarea unui vector nenegativ $x = x^*$ pentru care $Ax^* \leqslant b$, $Cx^* = \lambda^*$ deci

$$\mathbf{P}(cx^* = \lambda^*) = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

— soluția optimă conține componente pozitive ale vectorului însă există și componente nule ale lui ζ; atunci pentru $x = x^*$ avem

$$\begin{matrix} c^{j_1} x^* = \lambda^*, \ \ldots, \ c^{j_t} x^* = \lambda^* \\ c^{j_{t+1}} x^* > \lambda^*, \ \ldots, \ c^{j_s} x^* > \lambda^* \end{matrix} \quad \{j_1, \ldots, j_s\} \equiv \{1, \ldots, s\}$$

încît

$$\mathbf{P}(cx^* = \lambda^*) = \sum_{i=1}^{t} p_{j_i}$$

— soluția optimă conține toate componentele vectorului ζ și nici una nu este nulă; atunci pentru $x = x^*$ sînt satisfăcute condițiile $Ax^* \leqslant b$, $Cx^* > \lambda^*$ încît $\mathbf{P}(cx^* < \lambda^*) = 0$.

Dacă $\min \Sigma z_i > 0$ să presupunem că t dintre componentele vectorului z sînt pozitive și $r-t$ sînt nule. Fie $z_{i_1} > 0$; $z_{i_2} > 0$; $\ldots$, $z_{i_t} > 0$ și $z_{i_{t+1}} = 0, \ \ldots, \ z_{i_s} = 0$. Dacă z_{i_1} aparține bazei, ζ_{i_1} nu aparține bazei încît pentru soluția optimă $x = x^*$ avem

$$c^{i_1} x^* < \lambda^*, \ c^{i_2} x^* < \lambda^*, \ \ldots, \ c^{i_t} x^* < \lambda^*.$$

Dacă $z_{i_{t+1}} = 0$, $\zeta_{i_{t+1}}$ poate fi nul sau nu, încît

$$c^{i_{t+1}} x^* \geqslant \lambda^*, \ \ldots, \ c^{i_s} x^* \geqslant \lambda^*$$

deci

$$\mathbf{P}(cx^* < \lambda^*) = \sum_{k=1}^{t} p_{i_k}.$$

Dacă toate componentele vectorului z aparțin bazei atunci

$$cx^* < \lambda^* \text{ și } \mathbf{P}(cx^* \leqslant \lambda^*) = 1.$$

Rezolvarea problemei (I.2.44) nu conduce la determinarea regiunii de decizie $\mathcal{D}_{opt}$ dar micșorează numărul încercărilor necesare.

Exemplul IX. Reluăm problema din exemplul V în care s-a determinat pe cale grafică regiunea optimă de decizie pentru $\mathbf{P}(cx \geqslant 3)$. În acest exemplu vectorul c poate lua patru valori și anume:

$$\begin{matrix} c^1 = (1, -2) & c^2 = (1, 3) & c^3 = (2, -2) & c^4 = (-1, 1) \\ p_1 = 0{,}18 & p_2 = 0{,}12 & p_3 = 0{,}42 & p_4 = 0{,}28 \end{matrix}$$

α poate lua $2^4 - 2 = 14$ valori în intervalul $[0, 1]$ și anume:

0,88; 0,82; 0,72; 0,70; 0,60; 0,58; 0,54; 0,46; 0,42; 0,40; 0,30; 0,28; 0,18; 0,12

Scanned with OKEN Scanner

încît pentru determinarea regiunii optime de decizie ar putea fi necesară cercetarea compatibilității a cel mult 16 sisteme de inecuații. Modelul (I.2.44) ne permite să aflăm o regiune „apropiată" de D_{opt} și pentru $\mathbf{P}\{cx \geqslant \lambda^*\}$. În cazul nostru modelul (I.2.44) devine

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrl}
3x_1 & +\,2x_2 & +y_1 & & & & & & & & & & & & & & = 6 \\
8x_1 & -\,5x_2 & & +y_2 & & & & & & -\eta_1 & & & & & & & = 16 \\
-\,x_1 & +\,3x_2 & & & +y_3 & & & & & & & & & & & & = 17 \\
-3x_1 & +\,x_2 & & & & +y_4 & & & & & & & & & & & = 3 \\
x_1 & -\,2x_2 & & & & & +z_1 & & & & -\zeta_1 & & & & & & = 3 \\
x_1 & +\,3x_2 & & & & & & +z_2 & & & & -\zeta_2 & & & & & = 3 \\
2x_1 & -\,2x_2 & & & & & & & +z_3 & & & & -\zeta_3 & & & & = 3 \\
-x_1 & +\,x_2 & & & & & & & & +z_4 & & & & -\zeta_4 & & & = 3
\end{array}
\qquad \text{(I.2.45)}
$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ \zeta \geqslant 0$$

$$\min(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + My_1)$$

Soluția optimă se obține prin algoritmul simplex în iterația

(8)

			0	0	0	0	0	0	0	M	0	0	0	1	1	1	1
	Baza	Const.	x_1	x_2	η_1	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4
M	y_1	6	3	2	−1					1							
0	y_2	16	8	−5							1						
0	y_3	17	−1	3								1					
0	y_4	3	−3	1									1				
1	z_1	3	1	−2		−1								1			
1	z_2	3	1	3			−1								1		
1	z_3	3	2*	−2				−1								1	
1	z_4	3	−1	1					−1								1
		$6M$	$3M$	$2M$	$-M$												
		+12	+3			−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
M	y_1	$^3/_2$		5*	−1			$^3/_2$		1						$-^3/_2$	
0	y_2	4		3				4			1					−4	
0	y_3	$^{37}/_2$		2				$-^1/_2$				1				$^1/_2$	
0	y_4	$^{15}/_2$		−2				$-^3/_2$					1			$^3/_2$	
1	z_1	$^3/_2$		−1		−1		$^1/_2$						1		$-^1/_2$	
1	z_2	$^3/_2$		4			−1	$^1/_2$							1	$-^1/_2$	
0	x_1	$^3/_2$	1	−1				$-^1/_2$								$^1/_2$	
1	z_4	$^9/_2$		0				$-^1/_2$	−1							$+^1/_2$	1
		$^3/_2M$	0	$5M$	$-M$			$^3/_2M$		0	0	0	0	0	0	$-^3/_2M$	
		$+^{15}/_2$		+3		−1	−1	$+^1/_2$	−1							$-^3/_2$	0

(continuare 8)

			0 0	0	0	0	0	M	0	0 0	1	1	1	1
	Baza	Const.	x_1 x_2	η_1	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	y_1	y_2	y_3 y_4	z_1	z_2	z_3	z_4
	x_2	$^3/_{10}$	1	$-^1/_5$			$^3/_{10}$		$^1/_5$					$-^3/_{10}$	
	y_2	$^{31}/_{10}$		$^3/_5$			$^{31}/_{10}$		$-^3/_5$	1				$-^{31}/_{10}$	
	y_3	$^{179}/_{10}$		$^2/_5$			$-^{11}/_{10}$		$-^2/_5$		1			$^{11}/_{10}$	
	y_4	$^{81}/_{10}$		$-^2/_5$			$-^9/_{10}$		$^2/_5$			1		$^9/_{10}$	
1	z_1	$^{18}/_{10}$		$-^1/_5$	-1		$^8/_{10}$		$^1/_5$				1	$-^8/_{10}$	
1	z_2	$^3/_{10}$		$^4/_5$*		-1	$-^7/_{10}$		$-^4/_5$					$^7/_{10}$	
	x_1	$^{18}/_{10}$	1	$-^1/_5$			$-^2/_{10}$		$^1/_5$					$^2/_{10}$	
1	z_4	$^{45}/_{10}$		0			$-^5/_{10}$	-1	0					$^5/_{10}$	1
		6,6	0 0	$^3/_5$	-1	-1	$-^4/_{10}$	-1	$-M$ $-^3/_5$	0	0 0	0	0	$-^6/_{10}$	0
	x_2	$^3/_8$	1			$-^1/_4$	$^1/_8$						$^1/_4$	$-^1/_8$	
	y_2	$^{23}/_8$				$^3/_4$	$^{29}/_8$*			1			$-^3/_4$	$-^{29}/_8$	
	y_3	$^{142}/_8$				$^2/_4$	$-^6/_8$				1		$-^2/_4$	$^3/_4$	
	y_4	$^{66}/_8$				$-^2/_4$	$-^{10}/_8$					1	$^2/_4$	$^5/_4$	
1	z_1	$^{15}/_8$			-1	$-^1/_4$	$^5/_8$						$^1/_4$	$-^5/_8$	
	η_1	$^3/_8$		1		$-^5/_4$	$-^7/_8$						$^5/_4$	$^7/_8$	
	x_1	$^{15}/_8$	1			$-^1/_4$	$-^3/_8$						$^1/_4$	$^3/_8$	
1	z_4	$^{36}/_8$				0	$-^4/_8$	-1					0	$^1/_2$	1
		6,375	0 0	0	-1	$-^1/_4$	$^1/_8$	-1	$-M$	0	0 0	0	$-^3/_4$	$-^9/_8$	0
	x_2	$^8/_{29}$	1			$-^8/_{29}$				$-^1/_{29}$			$^8/_{29}$		
	ζ_3	$^{23}/_{29}$				$^6/_{29}$	1			$^8/_{29}$			$-^6/_{29}$	-1	
	y_3	$^{532}/_{29}$				$^{19}/_{29}$				$^6/_{29}$	1		$-^{19}/_{29}$		
	y_4	$^{268}/_{29}$				$-^7/_{29}$				$^{10}/_{29}$		1	$^7/_{29}$		
1	z_1	$^{40}/_{29}$			-1	$-^{11}/_{29}$				$-^5/_{29}$		1	$^{11}/_{29}$		
	η_1	$^{31}/_{29}$		1		$-^{31}/_{29}$				$^7/_{29}$			$^{31}/_{29}$		
	x_1	$^{63}/_{29}$	1			$-^5/_{29}$				$^3/_{29}$			$^5/_{29}$		
1	z_4	$^{142}/_{29}$				$^3/_{29}$		-1		$^4/_{29}$			$-^3/_{29}$		1
		6,27	0 0	0	-1	$-^8/_{29}$	0	-1	$-M$	$-^1/_{29}$	0	0 0	$-^{21}/_{29}$	-1	0

a patra; $\min = 6{,}27$, z_1, z_4 şi ζ_3 aparţin bazei încît

$$c^1x^* < 3; \quad c^2x^* = 3; \; c^3x^* > 3; \quad c^4x^* < 3$$

şi $\mathbf{P}(cx^* \geqslant 3) = \mathbf{P}(c = c^2) + \mathbf{P}(c = c^3) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54.$

Pentru a ne asigura că regiunea optimă de decizie nu corespunde unei probabilităţi mai mari decît 0,54 ar trebui cercetată compatibilitatea a şase sisteme şi anume pentru:

Scanned with OKEN Scanner

$$
\begin{array}{llllll}
\beta_{14} = 0{,}88; & Ax \leqslant b, & c^1x \geqslant 3, & c^3x \geqslant 3; & c^4x \geqslant 3 \\
\beta_{13} = 0{,}82; & Ax \leqslant b, & c^2x \geqslant 3, & c^3x \geqslant 3; & c^4x \geqslant 3 \\
\beta_{12} = 0{,}72; & Ax \leqslant b, & c^1x \geqslant 3, & c^2x \geqslant 3, & c^3x \geqslant 3 \\
\beta_{11} = 0{,}70; & Ax \leqslant b, & c^3x \geqslant 3, & c^4x \geqslant 3, & \\
\beta_{10} = 0{,}60; & Ax \leqslant b, & c^1x \geqslant 3 & c^3x \geqslant 3, & \\
\beta_9 = 0{,}58; & Ax \leqslant b, & c^1x \geqslant 3, & c^2x \geqslant 3, & c^4x \geqslant 3.
\end{array}
$$

Deoarece grupul de inecuaţii $c^1x \geqslant 3$; $c^3x \geqslant 3$ apare în trei din sistemele care trebuie cercetate vom considera în primul rînd problema

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
3x_1 + 2x_2 + y_1 & & & - \eta_1 & & = 6 & \\
8x_1 - 5x_2 & + y_2 & & & & = 16 & \\
-x_1 + 3x_2 & & + y_3 & & & = 17 & \text{(I.2.46)} \\
-3x_1 + x_2 & & & + y_4 & & = 3 & \\
x_1 - 2x_2 & & & + z_1 & - \zeta_1 & = 3 & \\
2x_1 - 2x_2 & & & & + z_3 - \zeta_3 & = 3 &
\end{array}
$$

$$\min(z_1 + z_3 + My_1)$$

care ne poate informa dacă semispaţiile $c^1x \geqslant 3$, $c^3x \geqslant 3$ au cel puţin un punct comun cu mulţimea $Ax \leqslant b$. Soluţia optimă a modelului (I.2.46) conţine pe z_1 şi ζ_3 încît $c^1x < 3$ şi $c^3x > 3$ deci $\mathbf{P}(cx \geqslant 3)$ nu poate lua valorile 0,88; 0,72; 0,60 pe mulţimea soluţiilor realizabile. Grupul de inegalităţi $c^3x \geqslant 3$, $c^4x \geqslant 3$ este compatibil cu condiţiile problemei dacă în soluţia optimă a modelului

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
3x_1 + 2x_2 + y_1 & & & - \eta_1 & & = 6 & \\
8x_1 - 5x_2 & + y_2 & & & & = 16 & \\
-x_1 + 3x_2 & & + y_3 & & & = 17 & \\
-3x_1 + x_2 & & & + y_4 & & = 3 & \text{(I.2.47)} \\
2x_1 - 2x_2 & & & + z_3 & - \zeta_3 & = 3 & \\
-x_1 + x_2 & & & & + z_4 - \zeta_4 & = 3 &
\end{array}
$$

$$\min(z_3 + z_4 + My_1)$$

variabilele z_3 şi z_4 au valori nule adică dacă minimul funcţiei obiectiv este zero. Iteraţia a treia din tabelul 8 în care ştergem linia z_1 ne arată că baza rămasă este optimă pentru (I.2.47). Deoarece z_4 aparţine bazei, $c^4x < 3$ şi $\mathbf{P}(cx < 3)$ nu poate lua valorile 0,82 sau 0,70. În acelaşi mod se exclude şi valoarea 0,58 a parametrului β_9.

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune acum că în relaţia

$$\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda) = \alpha$$

este dat $\alpha = \alpha^*$ şi se cere cea mai mică valoare a parametrului λ care o satisface. Interpretarea acestei informaţii în problema raţiei furajere este următoarea: care este cea mai mică margine superioară a costului raţiei furajere care poate fi asigurată cu o probabilitate dată. Se ştie că pentru o valoare determinată a parametrilor α şi λ, să zicem α^* şi λ_1 se poate determina o regiune de decizii $\mathcal{D}_{\alpha^*}$ astfel încît pentru orice $x \in \mathcal{D}_{\alpha^*}$ să avem $\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda_1) = \alpha^*$. Să admitem că $\mathbf{P}(cx \leqslant \lambda) = \alpha^*$ dacă sistemul

$$\begin{aligned} &Ax \leqslant b \\ &c^{j_i} x \leqslant \lambda; \quad i = 1, 2, \ldots, t; \{j_1, \ldots, j_t\} \subset \{1, \ldots, s\} \\ &x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.2.48}$$

este compatibil. Un punct extrem al regiunii $\mathcal{D}_\alpha$ este soluţia problemei

$$\begin{aligned} &Ax + y = b \\ &c^{j_i} x + z_i = \lambda; \quad i = 1, \ldots, t \\ &x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z_i \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, t \end{aligned} \tag{I.2.49}$$

$$\max \sum_{i=1}^{t} z_i.$$

Folosind algoritmul simplex se va obţine o bază B^* corespunzătoare unei soluţii dual realizabile. Această soluţie este optimă pe intervalul de variaţie a parametrului λ pe care toate componentele ei sînt pozitive, dacă acest interval există. Fie $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ intervalul de optimalitate pentru baza B^*. Atunci valoarea căutată pentru λ este $\lambda_1 = \underline{\lambda}$.

Exemplul X. Pentru alcătuirea unei raţii furajere cu un conţinut determinat de vitamine dispunem de două sortimente de nutreţ N_1 şi N_2 care conţin vitaminele V_1, V_2 şi V_3 în cantităţile indicate în tabelul 9.

(9)

Nutreţ / Vitamine	N_1	N_2	Necesar pe 7 zile
V_1	2	5	cel puţin 20 unităţi
V_2	2	3	cel puţin 16 „
V_3	3,2	6	cel mult 30,2 „

Prețurile c_1, și c_2 sînt aleatoare și pot lua valorile

$$\begin{array}{lll} c^1(6\,;\ 9) & c^2(6{,}2\,;\ 8{,}5) & c^3(8\,;\ 7) \\ p_1 = 0{,}28 & p_2 = 0{,}52 & p_3 = 0{,}20. \end{array}$$

În momentul în care se alocă fondurile pentru achiziționarea furajelor nu sînt cunoscute prețurile. Ce sumă de bani ar putea asigura cu o probabilitate de 70% acoperirea cheltuielilor pentru furajele vitaminate necesare săptămînal pe cap de animal?

Fie x_1 și x_2 cantitățile din furajele N_1, N_2 care satisfac condițiile

$$\begin{array}{c} 2x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 16 \\ 3{,}2x_1 + 6x_2 \leqslant 30{,}2 \\ x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0. \end{array} \qquad \text{(I.2.50)}$$

Costul rației furajere este

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

Trebuie determinată cea mai mică valoare a lui λ astfel încît probabilitatea ca această sumă să nu depășească λ să fie de 0,70. La mulțimea soluțiilor sistemului (I.2.50) se adaugă inecuațiile $c^2x \leqslant \lambda$; $c^3x \leqslant \lambda$ adică

$$\begin{array}{c} 6{,}2x_1 + 8{,}5x_2 \leqslant \lambda \\ 8x_1 + 7x_2 \leqslant \lambda. \end{array} \qquad \text{(I.2.51)}$$

(Pentru perechea $c^1x \leqslant \lambda$, $c^2x \leqslant \lambda$ se obține o valoare mai mare a lui λ, de aceea acest caz nu interesează.)

Cea mai mare valoare a parametrului λ pentru care mulțimea soluțiilor sistemului (I.2.50) — (I.2.51) este nevidă se găsește cu ajutorul problemei de programare liniară

$$\begin{array}{llllllll} 2x_1 & + 5x_2 + y_1 & & & - \eta_1 & & = 20 \\ 2x_1 & + 3x_2 & + y_2 & & & - \eta_2 & = 16 \\ 3{,}2x_1 & + 6x_2 & & + y_3 & & & = 30{,}2 \\ 6{,}2x_1 & + 8{,}5x_2 & & & + z_1 & & = \lambda \\ 8x_1 & + 7x_2 & & & & + z_2 & = \lambda \end{array}$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0,\ \zeta \geqslant 0$$

$$\max(z_1 + z_2 - My_1 - My_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

După două iteraţii se obţine o soluţie dual realizabilă care este optimă dacă toate componentele ei sînt pozitive. Din tabelul 10 care conţine această soluţie avem

$$z_1 \geqslant 0 \text{ pentru } \lambda \geqslant \frac{139,6}{3} = 46,5(3)$$

$$z_2 \geqslant 0 \text{ pentru } \lambda \geqslant \frac{134,5}{3} = 44,8(3)$$

(10)

c_B	$c_j \rightarrow$		0	0	$-M$	$-M$	0	1	1	0	0
	Baza	Soluţia	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	η_1	η_2
0	x_2	$11,5/3$		1			$5/6$				$4/3$
0	x_1	2,25	1				$-5/4$				$-5/2$
0	η_1	$11/3$					$5/3$			1	$5/3$
1	z_1	$(3\lambda - 139,6)/3$					$2/3$	1			$25/6$
1	z_2	$(3\lambda - 134,5)/3$					$25/6$		1		$64/6$
		0	0	0			$29/6$	0	0	0	$89/6$

încît soluţia este optimă pentru $\lambda \geqslant 46,5(3)$. Acest rezultat ne îndreptăţeşte să afirmăm că cheltuielile necesare pentru achiziţionarea furajelor nu depăşesc suma de 46,5(3) unităţi monetare. În adevăr, dacă raţia se compune din 2,25 unităţi din N_1 şi $\frac{11,5}{3}$ unităţi din N_2 nutreţul conţine cu $11/3$ unităţi din vitamina V_1 mai mult decît minimul cerut, exact 16 unităţi din V_2 şi exact 30,2 unităţi din V_3. Dacă preţurile vor fi $c^1 = (6\,;\, 9)$ costul acestei raţii este de 48 unităţi monetare, deci mai mare decît suma prevăzută. Dacă preţurile vor fi $c^2(6,2\,;\, 8,5)$ raţia costă 46,5(3) şi dacă achiziţionarea furajelor se face cu preţurile $c^3 = (8\,;\, 7)$ suma necesară este 44,8(3) adică mai puţin decît s-a prevăzut. Deoarece probabilitatea ca preţurile să fie c^2 este $p_2 = 0,52$ şi probabilitatea ca preţurile să fie c^3 este $p_3 = 0,20$ urmează că $\mathbf{P}(cx \leqslant 46,5(3) = 0,72$.
urmează că $\mathbf{P}(cx \leqslant 46,5(3)\,) = 0,72$.

B. Bereanu [5] [6] [7] tratează problema determinării soluţiei unei probleme de programare cu funcţia economică stochastică care, pentru o valoare dată a parametrului λ, realizează maximul $\mathbf{P}(cx \leqslant u)$ în cazul în care vectorul aleator c este de forma

$$c(\omega) = c^0 + \sum_{i=1}^{r} c^i z_i(\omega)$$

și în cazul în care componentele lui c sînt variabile aleatoare normale, independente.

În lucrările citate, soluția x_λ care satisface restricțiile problemei și maximizează $\mathbf{P}(c(\omega)x \leqslant \lambda)$ este denumită *soluție cu risc minim*. În cele ce urmează vom expune rezultatele obținute de B. Bereanu.

Se consideră sistemul de restricții

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.2.52}$$

și se notează cu $\mathcal{D}$ mulțimea soluțiilor acestui sistem. Se admite că $\mathcal{D}$ este nevidă și mărginită. Fie

$$f(\omega, x) = c(\omega)\, x \tag{I.2.53}$$

funcția economică ataşată sistemului de restricții. Admitem că $c(\omega)$ este de forma

$$c(\omega) = c^0 + \sum_{i=1}^{r} c^i t_i(\omega) \tag{I.2.54}$$

unde c^i, $i = 1, \ldots, r$ sînt vectori constanți, n-dimensionali iar $t(\omega) = (t_i(\omega))$ $i = 1, \ldots, r$ este un vector aleator, definit pe un dreptunghi r-dimensional I_r astfel încît

$$-\infty < \delta_i \leqslant t_i(\omega) \leqslant \delta_i' < \infty\,; \quad i = 1, \ldots, r.$$

Se notează cu $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ densitatea mixtă de probabilitate a vectorului $t(\omega)$. În condițiile stipulate e ușor de arătat că

$$G(t) = \max_{x \in \mathcal{D}} c(t)x \quad \text{și} \quad g(t) = \min_{x \in \mathcal{D}} c(t)x$$

sînt funcții convexe de $t(\omega)$ și că evenimentele

$$\{\max_{x \in \mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda\} \quad \text{și} \quad \{\min_{x \in \mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda\} \text{ sînt măsurabile.}$$

Se demonstrează următoarea

Lemă. Pentru orice număr real dat $\lambda = \lambda^*$ sînt satisfăcute inegalitățile

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\max_{x \in \mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \leqslant \max_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\min_{x \in \mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \end{aligned} \tag{I.2.55}$$

$$\mathbf{P}\{\min_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} \leqslant \max_{x\in\mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} \leqslant \leqslant \mathbf{P}\{\max_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} \tag{I.2.56}$$

Demonstrație. Fie $F_G(\lambda^*)$ și $F_g(\lambda^*)$ funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $G(\omega)$ și $g(\omega)$. Atunci

$$\mathbf{P}\{\max_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} = F_G(\lambda^*) \text{ și } \mathbf{P}\{\min_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} = F_g(\lambda^*).$$

Probabilitățile

$$\Gamma(x, \lambda^*) = \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \text{ și } \gamma(x, \lambda^*) = \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\}$$

sînt funcții continue de componentele lui x pe mulțimea $\mathcal{D}$ deoarece

$$\Gamma(x_1, \lambda^*) = \int_{\Delta_1} \varphi(\tau)d\tau \text{ și } \gamma(x, \lambda^*) = \int_{\Delta_2} \varphi(\tau)d\tau$$

unde

$$\Delta_1 = \left\{c^0x + \sum_{i=1}^{r} c^i x t_i(\omega) \leqslant \lambda^*\right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{c^0x + \sum_{i=1}^{r} c^i x t_i(\omega) \geqslant \lambda^*\right\}.$$

Este evident că

$$c(\omega)x \leqslant \lambda^* \text{ pentru } x\in\mathcal{D} \text{ implică } \min_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*$$

$$\max_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^* \text{ implică } c(\omega)x \leqslant \lambda^* \text{ pentru } x\in\mathcal{D}$$

$$\min c(\omega)x \geqslant \lambda^* \text{ implică } c(\omega)x \geqslant \lambda^* \text{ pentru } x\in\mathcal{D}$$

$$c(\omega)x \geqslant \lambda^* \text{ pentru } x\in\mathcal{D} \text{ implică } \max_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*.$$

Aceste implicații și continuitatea funcțiilor $\Gamma(x, \lambda^*)$, $\gamma(x, \lambda^*)$ pe compactul $\mathcal{D}$ justifică inegalitățile (I.2.55) și (I.2.56).

Folosind funcțiile de repartiție $F_G(\lambda^*)$ și $F_g(\lambda^*)$ ale variabilelor aleatoare $G(\omega) = \max_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x$ și $g(\omega) = \min_{x\in\mathcal{D}} c(\omega)x$, inegalitățile (I.2.55) și (I.2.56) mai pot fi scrise sub forma

$$F_G(\lambda^*) \leqslant \max_{x\in\mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \leqslant F_g(\lambda^*)$$

$$1 - F_g(\lambda^*) \leqslant \max_{x\in\mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} \leqslant 1 - F_G(\lambda^*).$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiție. Se numește *regiune de decizie* mulțimea

$$S_l = \{t | c(\omega)x^l = \min_{x \in \mathfrak{D}} c(t)x\} \tag{I.2.57}$$

unde x^l este o soluție realizabilă de bază a sistemului de restricții (I.2.52) sau, altfel spus, vectorul de poziție al punctului extremal V_l al mulțimii $\mathcal{D}$; x^l este soluția optimă a problemei de programare (I.2.52) — (I.2.54) pentru $t(\omega) \in S_l$. Pentru orice problemă de programare liniară numărul regiunilor de decizie este finit deoarece numărul soluțiilor realizabile de bază ale sistemului de restricții este finit. De asemenea, este evident că S_l este o submulțime convexă a mulțimii pe care este definit vectorul $t(\omega)$.

Folosind această definiție se enunță

Teorema VII. Dacă problema de programare liniară stochastică

$$\min_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x$$

are o singură regiune de decizie, atunci, pentru orice număr real $\lambda = \lambda^*$

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} = \mathbf{P}\{\min_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\}. \tag{I.2.58}$$

Analog, dacă problema de programare liniară stochastică

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x$$

are o singură regiune de decizie, atunci, pentru orice număr real

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} = \mathbf{P}\{\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*\}. \tag{I.2.59}$$

Demonstrație. Dacă problema de programare stochastică are o singură regiune de decizie, soluția care realizează optimul funcției economice este aceeași pentru toate valorile posibile ale vectorului aleator $t(\omega)$. Vom nota cu x^* această soluție.

Din (I.2.55) avem

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \leqslant \mathbf{P}\{\min_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \tag{I.2.60}$$

și

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} \leqslant \mathbf{P}\{\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*\}. \tag{I.2.61}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $x^* \in \mathcal{D}$ încît maximul funcţiei $\mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\}$ pe mulţimea $\mathcal{D}$ este cel puţin egal cu valoarea acestei funcţii într-un punct al mulţimii adică

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} \geqslant \mathbf{P}\{c(\omega)x^* \leqslant \lambda^*\}. \tag{I.2.62}$$

Din inegalităţile (I.2.60) — (I.2.62) şi (I.2.61) — (I.2.62) rezultă relaţiile (I.2.58) şi (I.2.59).

Dacă problema de programare stochastică are o singură regiune de decizie şi dacă sînt cunoscute funcţiile de repartiţie $F_G(\lambda^*)$ şi $F_g(\lambda^*)$ avem,

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\} = F_g(\lambda^*) \tag{I.2.63}$$

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} = 1 - F_G(\lambda^*). \tag{I.2.64}$$

Să presupunem acum că toate componentele c_j, $j = 1, \ldots, n$ ale vectorului c din funcţia economică sînt variabile aleatoare normale independente cu parametrii (m_j, σ_j) $j = 1, \ldots, n$. Se demonstrează

Teorema VIII. Vectorul x_{λ^*} care realizează

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{cx \leqslant \lambda^*\} \tag{I.2.65}$$

este vectorul pentru care se obţine

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \frac{\lambda^* - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}}. \tag{I.2.66}$$

Cu alte cuvinte, soluţia cu risc minim pentru problemele în care costurile c_j sînt variabile aleatoare normale independente este soluţia unei probleme deterministice de programare neliniară.

Demonstraţie. Este evident că inegalitatea

$$cx \leqslant \lambda^*$$

este echivalentă cu

$$\frac{cx - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \leqslant \frac{\lambda^* - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$\mathbf{P}\{cx \leqslant \lambda^*\} = \mathbf{P}\left\{\frac{cx - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \leqslant \frac{\lambda^* - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}}\right\} \tag{I.2.67}$$

Variabila aleatoare $cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ pentru un x dat, are o distribuţie normală cu parametrii $m = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j$; $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2$ încît variabila aleatoare

$$z = \frac{cx - m}{\sigma}$$

are o distribuţie normală cu parametrii (0,1). În urma acestor observaţii, din (I.2.67) rezultă că

$$\mathbf{P}\,(cx \leqslant \lambda^*) = \Phi\left(\frac{\lambda^* - m}{\sigma}\right)$$

unde $\Phi(u)$ este funcţia integrală a lui Laplace. Pentru determinarea soluţiei cu risc minim x_{λ^*} se rezolvă problema

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}(cx \leqslant \lambda^*) = \Phi\left(\max \frac{\lambda^* - m}{\sigma}\right)$$

ceea ce dovedeşte teorema enunţată.

Dacă toate variabilele aleatoare c_j au medii nule, m este nul şi

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\,(cx \leqslant \lambda^*) = \Phi\left(\max \frac{\lambda^*}{\sigma}\right)$$

încît soluţia cu risc minim x_{λ^*} este vectorul care realizează

$$\min_{x \in \mathfrak{D}} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2.$$

Se observă că, în acest caz, soluţia cu risc minim nu depinde de valoarea parametrului λ şi este vectorul care minimizează dispersia funcţiei economice.

Exemplul XI. Să se determine margini superioare şi inferioare pentru $\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \leqslant \lambda^*\}$ folosind inegalităţile (I.2.55), dacă sistemul de restricţii este

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqslant 6 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.2.68}$$

Scanned with OKEN Scanner

și funcția economică

$$(4 - t)x_1 + 5x_2 + (6 + t)x_3 \qquad \text{(I.2.69)}$$

în care t este o variabilă aleatoare normală cu parametrii $m = 0$, $\sigma = 2{,}16$. Vom căuta funcția de distribuție $F_G(\lambda)$ pentru

$$G(t) = \max_{x \in \mathfrak{D}} \{(4 - t)x_1 + 5x_2 + (6 + t)x_3\} \qquad \text{(I.2.70)}$$

unde $\mathfrak{D}$ este mulțimea soluțiilor sistemului (I.2.68).

Variabila aleatoare $t \in [-8, 8]$ cu o probabilitate de 99, 99% deci putem scrie $T(a) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a}{2{,}16}\right)$.

Valorile caracteristice pentru problema de programare parametrică (I.2.68) — (I.2.70) sînt $t = 1{,}5$ și $t = 4$ și pentru

$$t \in [-8;\ 1{,}5]; \quad G = 18 - 2t$$

$$t \in [1{,}5;\ 4]; \quad G = 15$$

$$t \in [4;\ 8]; \quad G = \frac{3(6 + t)}{2}.$$

Folosind formulele (I.2.18) adaptate pentru cazul de față, avem: pentru $t \in [-8;\ 1{,}5]$

$$H_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \lambda < 15 \\ T(1{,}5) - T\left(\frac{18 - \lambda}{2}\right) & \text{dacă} \quad 15 \leqslant \lambda < 34 \\ T(1{,}5) - T(-8) & \text{dacă} \quad \lambda \geqslant 34 \end{cases}$$

pentru $t \in [1{,}5;\ 4]$

$$H_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \lambda < 15 \\ T(4) - T(1{,}5) & \text{dacă } \lambda = 15 \end{cases}$$

pentru $t \in [4;\ 8]$

$$H_3(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \lambda < 15 \\ T\left(\frac{2\lambda - 18}{3}\right) - T(4) & \text{dacă} \quad 15 \leqslant \lambda < 21 \\ T(8) - T(4) & \text{dacă} \quad \lambda \geqslant 21. \end{cases}$$

Astfel funcția de distribuție $F_G(\lambda)$ este

$$F_G(\lambda) = H_1 + H_2 + H_3$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, dacă atribuim parametrului λ valoarea $\lambda^* = 20$ avem

$$\mathbf{P}\{\max_{x\in\mathcal{D}} [(4-t)x_1 + x_2 + (6+t)x_3] \leqslant \lambda^*\} = F_G(20) =$$

$$= H_1(20) + H_2(20) + H_3(20) = T(1{,}5) - T(-1) + T(4) - T(1{,}5) +$$

$$+ T\left(\frac{22}{3}\right) - T(4) = T\left(\frac{22}{3}\right) - T(-1) = 0{,}67801. \qquad \text{(I.2.71)}$$

Vom căuta acum funcţia de distribuţie $F_g(\lambda)$ pentru

$$g(t) = \min_{x\in\mathcal{D}} (4-t)x_1 + 5x_2 + (6+t)x_3 \qquad \text{(I.2.72)}$$

unde $\mathcal{D}$ este mulţimea soluţiilor sistemului (I.2.68). Rezolvînd problema de programare parametrică (I.2.68) — (I.2.72) se găsesc tot două valori caracteristice: $t = -6$ şi $t = 4$. Avem:

$$g(t) = \begin{cases} {}^3/_2(6+t) & \text{dacă } t\in[-8, -6] \\ 0 & \text{dacă } t\in[-6, 4] \\ {}^8/_3(4-t) & \text{dacă } t\in[4, 8] \end{cases}$$

Rezultă

$$h_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \lambda \leqslant -3 \\ T\left(\frac{2\lambda - 18}{3}\right) - T(-8) & 0 < \lambda \leqslant -3 \\ T(-6) - T(-8) & \lambda > 0 \end{cases}$$

$$h_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \leqslant 0 \\ T(4) - T(-6) & \lambda > 0. \end{cases}$$

$$h_3(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \leqslant -\frac{32}{3} \\ T(8) - T\left(\frac{32 - 3\lambda}{8}\right) & -\frac{32}{3} < \lambda \leqslant 0 \\ T(8) - T(4) & \lambda > 0. \end{cases}$$

$$F_g(\lambda) = h_1(\lambda) + h_2(\lambda) + h_3(\lambda).$$

În acest caz, pentru $\lambda^* = 20$ avem

$$F_g(20) = h_1(20) + h_2(20) + h_3(20) = T(-6) - T(-8) +$$

$$+ T(4) - T(-6) + T(8) - T(4) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza inegalității (I.2.55) se poate scrie

$$0{,}67801 \leqslant \max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{[(4-t)x_1 + 5x_2 + (6+t)x_3] \leqslant 20\} \leqslant 1.$$

Exemplul XII. Fie dată o problemă de programare liniară stochastică

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 6$$

$$x \geqslant 0$$

$$\max\{(4-t)x_1 + 5x_2 + (6+t)x_3\}$$

în care t este o variabilă aleatoare normală ale cărei valori sînt cuprinse „aproape sigur" în intervalul $[-2; 1]$. Să presupunem că acest model are scopul de a planifica sortimentul și nivelul producției care asigură întreprinderii beneficiul maxim. Planificatorul dorește să știe care este cea mai mare probabilitate cu care se poate obține un beneficiu de cel puțin 18 unități monetare.

În exemplul anterior s-a găsit că valorile caracteristice pentru problema propusă considerată ca un model de programare parametrică sînt $t = 1{,}5$ și $t = 4$. Dacă variabila aleatoare $t \in [-2, 1]$ înseamnă că, oricare ar fi valoarea pe care o ia t, baza optimală este aceeași și funcția economică este egală cu $18-2t$.

Prin teorema VII s-a dovedit că, în acest caz, pentru orice număr real λ^* avem:

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \mathbf{P}\{c(\omega)x \geqslant \lambda^*\} = \mathbf{P}\{\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda^*\}$$

Deoarece

$$\mathbf{P}\{\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \geqslant \lambda\} = 1 - F_G(\lambda)$$

și $F_G(\lambda) = \mathbf{P}\{18 - 2t \leqslant \lambda\} = \mathbf{P}\left\{t \geqslant \frac{18-\lambda}{2}\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{t \leqslant \frac{18-\lambda}{2}\right\} =$

$$= 1 - T\left(\frac{18-\lambda}{2}\right).$$

Vom avea pentru $\lambda = 18$:

$$\mathbf{P}\{\max_{x \in \mathfrak{D}} c(\omega)x \geqslant 18\} = T(0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $t \in [-2,1]$ vom putea considera că are media $m = -0,5$ și dispersia $\sigma = 0,405$. Într-adevăr în acest caz (t fiind normală),

$$\mathbf{P}\{t \notin [-2,\ 1]\} \leqslant 0,0001.$$

Avem deci $T(0) = \Phi\left(\frac{0,5}{0,405}\right) = \Phi\left(\frac{100}{81}\right)$ și probabilitatea căutată este $\Phi\left(\frac{100}{81}\right) = 0,89$.

§ 3. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE CU VECTORII b ȘI c ALEATORI

Într-o problemă de programare, vectorul b poate fi interpretat din punct de vedere economic ca vectorul care reprezintă disponibilul de materii prime utilizate în producția unor bunuri. Vectorul c poate fi privit ca vector al prețurilor per unități cu care pot fi vîndute aceste bunuri. Adeseori în practică prețurile unor produse sînt legate de disponibilul de materii prime încît problemele în care elementul (b, c) este considerat aleator sînt legate de situații reale.

Să presupunem că mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului de inecuații liniare

$$Ax \leqslant b$$

este polyhedronul convex $K(b)$. Să notăm cu

$$f(b, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

și cu $x^*(b, c)$ vectorul care realizează maximul funcției obiectiv pe mulțimea $K(b)$. Este evident că polyhedronul $K(b)$ depinde de b. Pentru valorile b_1 și b_2 atribuite vectorului b se obține polyhedroanele $K(b_1)$ și $K(b_2)$ ale căror fețe sînt hiperplane paralele.

Teorema I. Dacă pentru orice vector $b \in \Delta \subset R^m$ mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului $Ax \leqslant b$ este nevidă și mărginită, atunci problema

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \max cx \end{gathered} \qquad (I.3.1)$$

are o soluție optimă $x^*(b, c)$ pentru orice b dintr-un anumit domeniu din R^m și $c \in R^n$ iar funcția $f(b, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ este mărginită.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă pentru unele valori ale vectorului b mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului $Ax \leqslant b$ este un domeniu $D(b)$ nemărginit atunci $x^*(b, c)$ și $f(b, c)$ există și sînt finite numai pentru

$$c \in \gamma_{min} = \bigcap_{b \in R^m} \gamma_{D(b)}$$

unde s-a notat cu $\gamma_{D(b)}$ conul asociat domeniului $D(b)$.

Demonstrație. Dacă pentru un b_0 dat, $K(b_0)$ este nevid și mărginit, problema (I.3.1) are soluții optime și $f(b_0, c)$ este mărginit pentru orice vector $c \in R^n$, așa cum s-a arătat în § 2. Pentru orice vector c din conul, să zicem γ_{p_s}, asociat vertexului p_s al polyhedronului $K(b_0)$ funcția $f(b_0, c)$ are valoare cx_s^* unde x_s^* este vectorul asociat lui p_s. Dualul modelului (I.3.1) este:

$$\begin{gathered} yA \geqslant c \\ y \geqslant 0 \qquad\qquad (I.3.2) \\ \min yb. \end{gathered}$$

Dacă problema primală are un optim finit, se știe că și duala ei are de asemenea un optim finit și că

$$cx_s^* = y_s^* b$$

încît sistemul de restricții al problemei duale este compatibil, iar pentru un c determinat, soluțiile optime sînt finite pentru orice

$$b \in \Delta \subset R^m.$$

Teorema II. Funcția

$$f(b, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

este o funcție concavă de b pentru:

— orice vector $c \in R^n$ dacă mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului $Ax \leqslant b$ este familia de polyhedre $K(b)$ sau pentru

— orice vector $c \in \gamma_{min}$ dacă această mulțime este familia de domenii $D(b)$.

Demonstrație. Pentru c dat se consideră vectorii b_1, b_2 și $b_0 = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Notăm cu $x^*(b_1)$, $x^*(b_2)$ și $x^*(b_0)$ soluțiile optime pentru

$$f(b_1, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b_1,\ x \geqslant 0\}$$

$$f(b_2, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b_2,\ x \geqslant 0\}$$

$$f(b_0, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b_0,\ x \geqslant 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul $\tilde{x} = \lambda x^*(b_1) + (1 - \lambda)x^*(b_2)$ este nenegativ și satisface sistemul

$$Ax \leqslant b_0.$$

În adevăr, pentru $x^*(b_1)$ și $x^*(b_2)$ avem

$$\begin{aligned} Ax^*(b_1) &\leqslant b_1 \\ Ax^*(b_2) &\leqslant b_2. \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

Adunînd inegalitățile (I.3.3) înmulțite respectiv cu numerele pozitive λ și $(1 - \lambda)$ se obține inegalitatea

$$A[\lambda x^*(b_1) + (1 - \lambda)x^*(b_2)] \leqslant \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \tag{I.3.4}$$

sau

$$A\tilde{x} \leqslant b_0.$$

Pentru soluția $x = \tilde{x}$ funcția obiectiv ia valoarea

$$\begin{aligned} c\tilde{x} = c[\lambda x^*(b_1) + (1 - \lambda)x^*(b_2)] = \lambda cx^*(b_1) + (1 - \lambda)cx^*(b_2) = \\ = \lambda f(b_1, c) + (1 - \lambda)f(b_2, c) \end{aligned} \tag{I.3.5}$$

dar $\tilde{x}$ nu este obligatoriu soluția optimă pentru $f(b_0, c)$ deci

$$cx^*(b_0) \geqslant c\tilde{x}. \tag{I.3.6}$$

Înlocuind în această inegalitate pe $cx^*(b_0)$ prin $f(b_0, c)$ și pe $c\tilde{x}$ prin valoarea dată de relația (I.3.5) se obține inegalitatea

$$f(b_0, c) \geqslant \lambda f(b_1, c) + (1 - \lambda)f(b_2, c) \tag{I.3.7}$$

care dovedește că $f(b, c)$ este o funcție concavă de b.

Prin teorema III din § 2 s-a arătat că $f(b, c)$ este o funcție convexă de c pentru orice b dat deci că

$$f(b, c_0) \leqslant \lambda f(b, c_1) + (1 - \lambda)f(b, c_2). \tag{I.3.8}$$

Fie $\varphi(b, c)$ funcția de distribuție a elementului aleator (b, c) definită pe produsul cartezian $R^m \times R^n$, dacă $f(b, c)$ este mărginită pe R^n, sau pe $R^m \times \gamma_{min}$, dacă $f(b, c)$ este mărginită numai pe γ_{min}. Notăm cu $\varphi_c(b)$ și $\varphi_b(c)$ distribuțiile condiționate ale vectorilor aleatori b și c și cu $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_c$ mediile relative la aceste distribuții. Din (I.3.7) și (I.3.8) se deduc inegalitățile:

$$\mathbf{E}_c f(b_0, c) \geqslant \lambda \mathbf{E}_c f(b_1, c) + (1 - \lambda)\mathbf{E}_c f(b_2, c) \tag{I.3.9}$$

$$\mathbf{E}_b f(b, c_0) \leqslant \lambda \mathbf{E}_b f(b, c_1) + (1 - \lambda)\mathbf{E}_b f(b, c_2). \tag{I.3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este uşor de arătat că, în condiţiile stipulate de teoremele III din § 2 şi II din § 3,

$$g(b, c) = \{\min cx | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$$

este o funcţie concavă de c pentru orice b dat şi funcţie convexă de b pentru orice c dat. În toate cazurile se presupune că sistemul $Ax \leqslant b$ este compatibil pentru orice b.

Dacă vectorul c este constant şi b aleator se poate enunţa

Teorema III. Media valorilor funcţiei obiectiv într-o problemă stochastică de maximizare în care vectorul b este aleator este cel mult egală cu valoarea funcţiei obiectiv a problemei deterministice în care b ia valoarea medie, adică

$$\mathbf{E}_b\{\max cx | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\} \leqslant \{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, x \geqslant 0\}. \quad (I.3.11)$$

Folosind notaţiile

$$f(b, c) = \{\max cx | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$$
$$f(\mathbf{E}b, c) = \{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, x \geqslant 0\}$$

inegalitatea (I.3.11) se scrie sub forma

$$\mathbf{E}_b f(b, c) \leqslant f(\mathbf{E}b, c). \quad (I.3.12)$$

Demonstraţie. Să considerăm cuplul de probleme stochastice duale, pe care le notăm cu (P.S) şi (D.S) — primala şi duala stochastică

$$\begin{array}{lll} & Ax \leqslant b & \\ (P.S) & x \geqslant 0 & \\ & \max cx & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & yA \geqslant c & \\ (D.S) & y \geqslant 0 & \\ & \min yb. & \end{array}$$

Fie $x^*(b)$ soluţia optimă a problemei (P.S) pentru un b dat. Avem

$$cx^*(b) = y^*b \quad (I.3.13)$$

în baza unei proprietăţi a cuplului de probleme duale.

Să considerăm şi cuplul de probleme deterministice duale, pe care le notăm cu (P.D) şi (D.D) — primala şi duala deterministică —

$$\begin{array}{lll} Ax \leqslant \mathbf{E}b & & \\ x \geqslant 0 & (P.D) & \\ \max cx & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} yA \geqslant c & & \\ y \geqslant 0 & (D.D) & \\ \min y(\mathbf{E}b) & & \end{array}$$

Fie $x^*(\mathbf{E}b)$ soluţia optimă pentru (P.D). Se ştie că

$$cx^*(\mathbf{E}b) = \tilde{y}(\mathbf{E}b) \quad (I.3.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

$\tilde{y}$ este o soluție și pentru (D.S) dar nu necesar optimă, încît

$$y^*b \leqslant \tilde{y}b \tag{I.3.15}$$

Înlocuim în această inegalitate pe y^*b prin $cx^*(b)$, deci

$$cx^*(b) \leqslant \tilde{y}b \tag{I.3.16}$$

Luînd mediile ambilor membri ai inegalității (16) avem:

$$\mathbf{E}_b cx^*(b) \leqslant \tilde{y}(\mathbf{E}b) \tag{I.3.17}$$

încît, folosind egalitatea (I.3.14) găsim relația

$$\mathbf{E}_b cx^*(b) \leqslant cx^*(\mathbf{E}b) \tag{I.3.18}$$

care dovedește teorema enunțată.

Analog se demonstrează inegalitatea

$$\mathbf{E}_b g(b, c) \geqslant g(\mathbf{E}b, c)$$

pentru

$$g(b, c) = \{\min cx | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}.$$

Exemplul I. Să se verifice inegalitatea (I.3.11) pentru modelul

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant b_1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 \leqslant b_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ \max (2x_1 + 3x_2 - x_3) \end{gathered}$$

în care vectorul b este o variabilă aleatoare discretă cu distribuția

$$b \begin{pmatrix} (8\,;\,3) & (1\,;\,5) & (3\,;\,-2) \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1) \end{pmatrix}.$$

Transformarea sistemului restricțiilor într-un sistem de ecuații cere introducerea a două variabile de abatere pe care le notăm cu y_1 și y_2. Dispunînd de cinci vectori, se pot forma 10 baze. Vectorul c este constant încît se poate stabili cu ușurință care dintre aceste baze satisface criteriile de optimalitate $z_j - c_j \geqslant 0$ pentru vectorii care nu aparțin bazei. Analizînd bazele posibile se stabilește că numai trei pot fi baze optimale pentru exemplul ales și acestea sînt bazele formate de vectorii asociați variabilelor (x_1, y_2); (x_1, x_2) și (x_3, x_2). Inversele acestor baze sînt

$$B^{-1}(x_1, y_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & -1/9 \end{bmatrix}; \quad B^{-1}(x_3, x_2) = \begin{bmatrix} -1/5 & -2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Oricare dintre aceste baze este optimă pentru toți vectorii b care au componente nenegative în baza considerată. Astfel $b^{(1)}$ (8 ; 3) în bazele care pot fi optime are componentele :

$$B^{-1}(x_1, y_2)b^{(1)} = (8, -29) ; \; B^{-1}(x_1, x_2)b^{(1)} = (14/9, 29/9) ;$$
$$B^{-1}(x_3, x_2)b^{(1)} = (-14/5, 27/5)$$

încît, pentru $b^{(1)}$ baza optimă este formată din vectorii x_1, x_2 și valoarea funcției obiectiv este

$$f_1 = 2 \times \frac{14}{9} + 3 \times \frac{29}{9} = \frac{115}{9}.$$

Pentru $b^{(2)}(1,5)$ găsim

$$B^{-1}(x_1, y_2)b^{(2)} = (1,1) ; \; B^{-1}(x_1x_2)b^{(2)} = (11/9, -1/9) ;$$
$$B^{-1}(x_3x_2)b^{(2)} = (-11/5, 8/5)$$

încît, în acest caz, baza optimă este formată din vectorii (x_1, y_2) și funcția obiectiv pentru soluția optimă are valoarea $f_2 = 2$. Pentru $b^{(3)}$ (3, — 2) avem

$$B^{-1}(x_1y_2)b^{(3)} = (3, -14) ; \; B^{-1}(x_1x_2)b^{(3)} = (-1/9, 14/9) ;$$
$$B^{-1}(x_3x_2)b^{(3)} = (1/5, 7/5)$$

deci baza (x_3, x_2) este optimă și valoarea maximă a funcției obiectiv este $f_3 = 4$. Cu aceste rezultate avem

$$\mathbf{E}_b[\max cx] = 0{,}6 \times \frac{115}{9} + 0{,}3 \times 2 + 0{,}1 \times 4 = 8{,}(6).$$

Vectorul $\mathbf{E}b$ are componentele $b_1 = 5{,}4$; $b_2 = 3{,}1$. Componentele acestui vector în bazele care pot fi optime sînt :

$$B^{-1}(x_1y_2)\mathbf{E}b = (5{,}4 ; -18{,}5) ; \; B^{-1}(x_1x_2)\mathbf{E}b = \left(\frac{11{,}6}{9} ; \frac{18{,}5}{9}\right) ;$$

$$B^{-1}(x_3x_2)\mathbf{E}b = \left(-\frac{11{,}6}{5} ; \frac{19{,}3}{5}\right)$$

încît baza optimă este (x_1x_2) și

$$\{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, \; x \geqslant 0\} = \frac{78{,}7}{9} = 8{,}7(5).$$

Valorile găsite pentru $\mathbf{E}_b[\max cx]$ și $\{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, \; x \geqslant 0\}$ verifică inegalitatea (I.3.11).

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul II. Să se verifice că $\mathbf{E}_b f(b, c) \geqslant f(\mathbf{E}b, c)$ pentru problema de programare liniară stochastică

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 = 0 \\ \min (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4) \end{gathered}$$

în care componentele vectorului b sînt variabile aleatoare independente cu următoarele distribuţii:

$$b_1\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad b_2\begin{pmatrix} 8 & 5{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad b_3\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Distribuţia vectorului b, rezultată din distribuţiile componentelor sale, este

$$b\begin{pmatrix} (8;8;10) & (8;8;6) & (8;5{,}5;10) & (8;5{,}5;6) & (6;8;10) \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (6;8;6) & (6;5{,}5;10) & (6;5{,}5;6) \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

şi

$$\mathbf{E}b = (7,\ 6,\ 8)$$

Observaţie. De data aceasta restricţiile problemei apar sub forma de egalităţi; se vede însă uşor că inegalitatea menţionată are loc şi în acest caz.

Soluţia problemei deterministice în care b ia valoarea $\mathbf{E}b$ se găseşte după trei iteraţii simple. Redăm iteraţia iniţială şi cea optimă. Din iteraţia optimă avem

$$\{\min cx | Ax = \mathbf{E}b,\ x \geqslant 0\} = \frac{126}{25} = 5{,}04.$$

Pentru a calcula $\mathbf{E}\{\min cx | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ trebuie rezolvate opt probleme de programare liniară deterministică în care vectorului b i se atribuie succesiv valorile $b = (8, 8, 10)$; $b = (8, 8, 6)$ etc.

Soluţiile acestor probleme se pot calcula folosind metoda postoptimizării. Rezultatele găsite sînt redate în tabelul 12.

Scanned with OKEN Scanner

(11)

c_B	c_j / Baza	→ / b	1 / x_1	1 / x_2	2 / x_3	−1 / x_4	M / ζ_1	M / ζ_2	M / ζ_3
M	ζ_1	7	1	2	−1	3	1		
M	ζ_2	6	2	−1	−1	1		1	
M	ζ_3	8	1	3	2	−1			1
			$4M-1$	$4M-1$	-2	$3M+1$	0	0	0
−1	x_4	$^3/_{25}$			$-^{16}/_{25}$	1	$^7/_{25}$	$-^1/_{25}$	$-^5/_{25}$
1	x_1	$^{92}/_{25}$	1		$^1/_{25}$		$-^2/_{25}$	$^{11}/_{25}$	$^5/_{25}$
1	x_2	$^{37}/_{25}$		1	$^{11}/_{25}$		$^3/_{25}$	$-^4/_{25}$	$^5/_{25}$
		$^{126}/_{25}$	0	0	$-^{22}/_{25}$	0	$-M'$	$-M''$	$-M'''$

(12)

Componentele vectorului b	Soluţia optimă				Valoarea funcţiei obiectiv	Probabilitatea soluţiei
	x_1	x_2	x_3	x_4		
8; 8; 10	$^{39}/_8$	$^{19}/_8$	$^1/_8$	0	$^{30}/_4$	0,05
8; 8; 6	$^{102}/_{25}$	$^{22}/_{25}$	0	$^{18}/_{25}$	$^{106}/_{25}$	0,05
8; 5,5; 10	$^{94,5}/_{25}$	$^{52}/_{25}$	0	$^{0,5}/_{25}$	$^{146}/_{25}$	0,2
8; 5,5; 6	$^{74,5}/_{25}$	$^{32}/_{25}$	0	$^{20,5}/_{25}$	$^{86}/_{25}$	0,2
6; 8; 10	$^{79}/_{16}$	$^{21}/_{16}$	$^9/_{16}$	0	$^{59}/_8$	0,05
6; 8; 6	$^{104}/_{25}$	$^{19}/_{25}$	0	$^{11}/_{25}$	$^{112}/_{25}$	0,05
6; 5,5; 10	$^{61,5}/_{16}$	$^{28,5}/_{16}$	$^{6,5}/_{16}$	0	$^{103}/_{16}$	0,2
6; 5,5; 6	$^{76,5}/_{25}$	$^{29}/_{25}$	0	$^{13,5}/_{25}$	$^{92}/_{25}$	0,2

Astfel avem:

$$\mathbf{E}\{\min cx \mid Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\} = \left(\frac{30}{4} + \frac{106}{25} + \frac{59}{8} + \frac{112}{25}\right) 0{,}05 +$$

$$+ \left(\frac{146}{25} + \frac{86}{25} + \frac{103}{16} + \frac{92}{25}\right) 0{,}2 = 5{,}06.$$

Deoarece $5{,}04 < 5{,}06$ teorema este verificată.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul III. Să se verifice inegalitatea (I.3.11) pentru modelul din exemplul I în care componentele vectorului b sînt variabile aleatoare independente cu distribuţiile

$$\varphi(b_1) = \frac{1}{80} \quad [10 \leqslant b_1 \leqslant 90]$$

$$\varphi(b_2) = \frac{1}{100} \quad [-20 \leqslant b_2 \leqslant 80].$$

Se calculează componentele vectorului $b(b_1, b_2)$ în bazele care pot fi optime şi se găseşte

$$B^{-1}(x_1 y_2)b = (b_1 ; \ -4b_1 + b_2)$$

$$B^{-1}(x_1 x_2)b = \left(\frac{1}{9} b_1 + \frac{2}{9} b_2 ; \ \frac{4}{9} b_1 - \frac{1}{9} b_2\right)$$

$$B^{-1}(x_3 x_2)b = \left(-\frac{1}{5} b_1 - \frac{2}{5} b_2 ; \ \frac{3}{5} b_1 + \frac{1}{5} b_2\right).$$

Baza (x_1, y_2) este optimă pentru

$$b_1 \geqslant 0 ; \ -4b_1 + b_2 \geqslant 0$$

deci, ţinînd seama de distribuţiile elementelor aleatoare, această bază este optimă pentru

$$10 \leqslant b_1 \leqslant 20 ; \ b_2 \geqslant 4b_1.$$

Baza (x_1, x_2) este optimă pentru

$$b_1 + 2b_2 \geqslant 0 ; \ 4b_1 - b_2 \geqslant 0$$

deci pentru

$$10 \leqslant b_1 \leqslant 90 ; \quad -\frac{b_1}{2} \leqslant b_2 \leqslant 4b_1.$$

În sfîrşit, baza (x_3, x_2) este optimă dacă

$$b_1 + 2b_2 \leqslant 0 ; \ 3b_1 + b_2 \geqslant 0$$

deci, dacă

$$10 \leqslant b_1 \leqslant 40 ; \ -20 \leqslant b_2 \leqslant -\frac{b_1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 8 sînt reprezentate grafic regiunile de optimalitate ale fiecărei baze și intervalele de variație ale elementelor aleatoare b_1 și b_2. Funcția obiectiv ia valorile:

$f_1 = 2b_1$ dacă baza optimă este $B_1(x_1, y_2)$

$f_2 = \frac{1}{9}(14b_1 + b_2)$ dacă baza optimă este $B_2(x_1, x_2)$

$f_3 = (2b_1 + b_2)$ dacă baza optimă este $B_3(x_3, x_2)$

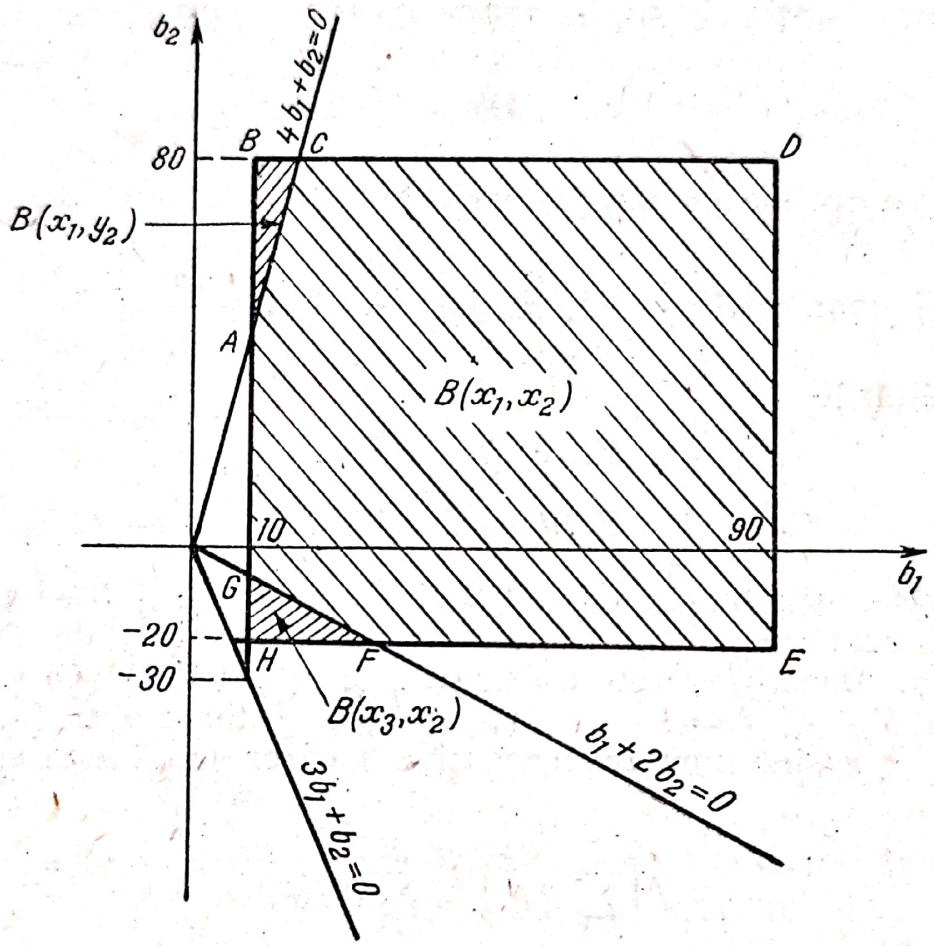

Fig. 8

Se calculează

$$\mathbf{E}_b(\max cx) = \mathbf{E}_b(2b_1) + \mathbf{E}_b\left[\frac{1}{9}(14b_1 + b_2)\right] + \mathbf{E}_b\left[\frac{1}{5}(7b_1 + 4b_2)\right].$$

Avem:

$$\mathbf{E}_b(2b_1) = \int_{ABC} 2b_1 d\varphi(b_1) d\varphi(b_2) = \frac{2}{8000}\int_{10}^{20}\int_{4b_1}^{80} b_1 db_1 db_2 = \frac{2}{3} = 0{,}67;$$

$$\mathbf{E}_b\left[\frac{1}{9}(14b_1 + b_2)\right] = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8000}\int_{ACDEFG}(14b_1 + b_2) db_1 db_2 = 79{,}58;$$

$$\mathbf{E}_b[(2b_1 + b_2)] = \frac{1}{8000}\int_{GHF}(2b_1 + b_2)db_1db_2 = 0{,}70;$$

$$\mathbf{E}_b(\max cx) = 0{,}67 + 79{,}58 + 0{,}70 = 80{,}95.$$

Pe de altă parte, vectorul $\mathbf{E}b$ are componentele (50,30). Componentele vectorului $\mathbf{E}b$ în bazele care pot fi optimale sînt

$$B^{-1}(x_1, y_2)\mathbf{E}b = (50, -170); \; B^{-1}(x_1, x_2)\mathbf{E}b = \left(\frac{110}{9}, \frac{170}{9}\right);$$

$$B^{-1}(x_3, x_2)\mathbf{E}b = (-22, 36)$$

încît soluţia optimă pentru $\{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, \; x \geqslant 0\}$ este $x_1 = \frac{110}{9}$;

$x_2 = \frac{170}{9}$ şi $\{\max cx | Ax \leqslant \mathbf{E}b, \; x \geqslant 0\} = \frac{110}{9} \cdot 2 + \frac{170}{9} \cdot 3 = \frac{730}{9} = 81{,}(1).$

Inegalităţile

$$\mathbf{E}_c f(b, c) \geqslant f(b, \mathbf{E}c)$$

$$\mathbf{E}_b f(b, c) \leqslant f(\mathbf{E}b, c)$$

demonstrate prin teorema IV § 2 şi teorema III § 3 se pot stabili şi cu ajutorul inegalităţii cunoscute sub denumirea de *Inegalitatea lui Jensen*. Dacă $f(x)$ este o funcţie convexă definită pe un interval închis $[a, b]$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, aparţin intervalului $[a, b]$ şi p_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt numere nenegative a căror sumă este egală cu 1, atunci

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \qquad \text{(I.3.19)}$$

Demonstraţie. Fie x_1, x_2 două valori din intervalul $[a, b]$. Pentru orice $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ aparţine intervalului $[a, b]$ încît inegalitatea

$$f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \qquad \text{(I.3.20)}$$

este satisfăcută deoarece, prin ipoteză, funcţia $f(x)$ este convexă pe $[a, b]$. Numerele p_1, p_2 sînt prin definiţie numere nenegative şi subunitare încît se poate lua pentru λ valoarea

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$1 - \lambda = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

și

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}.$$

Pentru $\lambda = \lambda_1$, inegalitatea (I.3.20) ne dă

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) \leqslant \frac{1}{p_1 + p_2} [p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)] \qquad \text{(I.3.21)}$$

Să considerăm acum punctele x_3, $x_3' = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$ și $x = \lambda x_3' + (1 - \lambda) x_3$. Punctul x astfel definit aparține intervalului $[a, b]$ dacă

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Inegalitatea

$$f(x) \leqslant \lambda f(x'_3) + (1 - \lambda) f(x_3)$$

pentru $\lambda = \lambda_2$ este

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{p_1 + p_2 + p_3}\right) \leqslant \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3} f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) + \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} f(x_3)$$

sau, ținînd seama de (I.3.21), avem

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{p_1 + p_2 + p_3}\right) \leqslant \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} [p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + p_3 f(x_3)] \qquad \text{(I.3.22)}$$

În mod analog se obțin inegalități de aceeași formă pentru perechile de puncte (x_4, x_4'), ..., (x_k, x_k'), ..., (x_{n-1}, x_{n-1}') în care

$$x_k' = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i} \quad k = 4, \ldots, n - 1$$

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i} \quad k = 3, \ldots, n - 1$$

încît pentru cuplul (x_{n-1}, x'_{n-1}) avem

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

Inegalitatea lui Jensen rămîne valabilă dacă

— $f(x)$ este o funcţie convexă şi continuă de variabila aleatoare continuă x cu valori în intervalul $[a, b]$,

— $f(x)$ este o funcţie convexă de vectorul aleator x care ia valori pe o mulţime convexă închisă.

Pentru aceste cazuri inegalitatea (I.3.19) devine

$$f(\mathbf{E}x) \leqslant \mathbf{E}f(x) \tag{I.3.23}$$

Ne propunem acum să demonstrăm inegalităţile

$$\mathbf{E}_c f(b, c) \geqslant f(b, \mathbf{E}c) \tag{I.3.24}$$

$$\mathbf{E}_b f(b, c) \leqslant f(\mathbf{E}b, c) \tag{I.3.25}$$

prin inegalitatea lui Jensen. S-a arătat că

$$f(b, c) = \{\max cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

este funcţie convexă de c pentru orice b (teorema II § 2) şi funcţie concavă de b pentru orice c, dacă mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului $Ax \leqslant b$ este o familie de polyhedre (teorema II § 3).

Dacă c este un vector aleator cu valori în intervalul $[\underline{c}, \bar{c}]$ inegalitatea (I.3.24) rezultă aplicînd inegalitatea lui Jensen funcţiei $f(b, c)$ pentru o valoare determinată a vectorului b. Pentru a dovedi relaţia (I.3.25) vom arăta că mulţimea vectorilor b pe care este definită $f(b, c)$ este o mulţime convexă dacă $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ sînt polyhedre pentru orice b.

Fie b_1 şi b_2 doi vectori pentru care $f(b, c)$ este definită şi fie $b_0 = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$ $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Funcţia $f(b, c)$ este definită şi pentru b_0 deoarece sistemul $Ax \leqslant b_0$, $x \geqslant 0$ este compatibil. În adevăr, dacă pentru $x_1 \geqslant 0$ avem $Ax_1 \leqslant b_1$ şi pentru $x_2 \geqslant 0$ avem $Ax_2 \leqslant b_2$ atunci, pentru $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $Ax_0 \leqslant b_0$. Fie K_0 mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului $Ax \leqslant b_0$, $x \geqslant 0$. Deoarece x_0 este o soluţie a acestui sistem, K_0 este nevidă şi, după cum se poate vedea uşor, convexă.

De asemenea se poate arăta că mulţimea K_0 este şi închisă. Deoarece funcţia $-f(b, c)$ este definită pe o mulţime convexă şi închisă, ea va satisface inegalitatea lui Jensen, încît

$$-\mathbf{E}_b f(b, c) \geqslant -f(\mathbf{E}b, c).$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema IV. Dacă $f(b, c) = \{\max cx | Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\}$ vectorii b şi c fiind aleatori şi dacă mulţimea $K(b)$ este nevidă şi mărginită pentru orice b, atunci

$$\mathbf{E}_c\mathbf{E}_b f(b, c) \geqslant \mathbf{E}_b f(b, \mathbf{E}c) \tag{I.3.26}$$

$$\mathbf{E}_b\mathbf{E}_c f(b, c) \leqslant \mathbf{E}_c f(\mathbf{E}b, c). \tag{I.3.27}$$

Demonstraţie. Funcţia $\mathbf{E}_b f(b, c)$ este o funcţie convexă de c deoarece este o combinaţie liniară convexă de funcţii convexe. De asemenea $\mathbf{E}_c f(b, c)$ este o funcţie concavă de b. Inegalitatea lui Jensen pentru funcţiile $\mathbf{E}_b f(b, c)$ şi $\mathbf{E}_c f(b, c)$ conduce la relaţiile (I.3.26) şi (I.3.27).

Dacă b şi c sînt variabile aleatoare independente $\mathbf{E}_c\mathbf{E}_b f(b, c) = \mathbf{E}_b\mathbf{E}_c f(b, c)$ încît notînd cu $\mathbf{E}f(b, c)$ valoarea medie a funcţiei $f(b, c)$ în raport cu ambele variabile aleatoare, inegalităţile (I.3.26) şi (I.3.27) se mai scriu sub forma

$$\mathbf{E}_b f(b, \mathbf{E}c) \leqslant \mathbf{E}f(b, c) \leqslant \mathbf{E}_c f(\mathbf{E}b, c).$$

Exemplul IV. O întreprindere poate include în plan trei produse A, B, C pentru care sînt necesare materiile prime M_1 şi M_2. Consumurile specifice de materii prime pe unitatea de produs sînt redate în tabelul 13

(13)

consum specific / materie primă	A	B	C
M_1	3	2	1
M_2	2	4	2

Cantităţile de materii prime de care dispune întreprinderea sînt variabile aleatoare independente cu distribuţie uniformă luînd valori în intervalele [100, 200] şi [150, 200]. Beneficiile pe unitatea de produs depind de preţul de achiziţie al materiilor prime şi pot fi

$$\begin{pmatrix} (5,\ 4,\ 1) & (6,\ 5,\ 3) & (7,\ 5,\ 4) \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Modelul acestei probleme de programare stochastică este

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant b_2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \\ \max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) \end{gathered} \tag{I.3.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru verificarea inegalităţilor (I.3.26) şi (I.3.27) se mai scriu problemele $f(b, \mathbf{E}c)$

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant b_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ \max (6{,}2x_1 + 4{,}9x_2 + 3{,}1x_3) \end{gathered} \qquad \text{(I.3.29)}$$

şi $f(\mathbf{E}b, c)$

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 150 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 175 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ \max (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3). \end{gathered} \qquad \text{(I.3.30)}$$

Rezolvăm modelul (I.3.29) prin metoda simplex. Dacă se notează cu ζ_1, ζ_2 variabilele necesare pentru transformarea restricţiilor modelului în egalităţi, iteraţiile necesare pentru determinarea soluţiilor optime sînt redate în tabelul 14.

(14)

c_B	c_j		6,2	4,9	3,1	0	0	Condiţii de optimalitate
	Baza	Constante	x_1	x_2	x_3	ζ_1	ζ_2	
0	ζ_1	b_1	3*	2	1	1	0	
0	ζ_2	b_2	2	4	2	0	1	
		0	−6,2	−4,9	−3,1	0	0	
6,2	x_1	$b_1/3$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	$^1/_3$	0	
0	ζ_2	$(3b_2-2b_1)/3$	0	$^8/_3$	$^4/_3$*	$-^2/_3$	1	
		$6{,}2b_1/3$	0	$-\frac{2{,}3}{3}$	$-\frac{3{,}1}{3}$	$\frac{6{,}2}{3}$	0	
6,2	x_1	$(2b_1-b_2)/4$	1	0	0	$^1/_2$	$-^1/_4$*	$2b_1-b_2\geqslant 0$
3,1	x_3	$(3b_2-2b_1)/4$	0	2	1	$-^1/_2$*	$^3/_4$	$3b_2-2b_1\geqslant 0$
		$(6{,}2b_1+3{,}1b_2)/4$	0	1,3	0	$\frac{3{,}1}{2}$	$\frac{3{,}1}{4}$	
6,2	x_1	$b_2/2$	1	2	1	0	$^1/_2$	
0	ζ_1	$(2b_1-3b_2)/2$	0	−4	−2	1	$-^3/_2$	$2b_1-3b_2\geqslant 0$
		$3{,}1b/2$	0	7,5	3,1	0	3,1	
0	ζ_2	b_2-2b_1	−4	0	0	−2	1	$b_2-2b_1\geqslant 0$
3,1	x_3	b_1	3	2	1	1	0	
		$3{,}1b_1$	3,1	1,3	0	3,1	0	

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 9 sînt reprezentate dreptele $2b_1 - b_2 = 0$, $3b_2 - 2b_1 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ care limitează domeniile de optimalitate ale diferitelor baze şi $b_1 = 100$; $b_1 = 200$; $b_2 = 150$; $b_2 = 200$ care limitează dreptun-

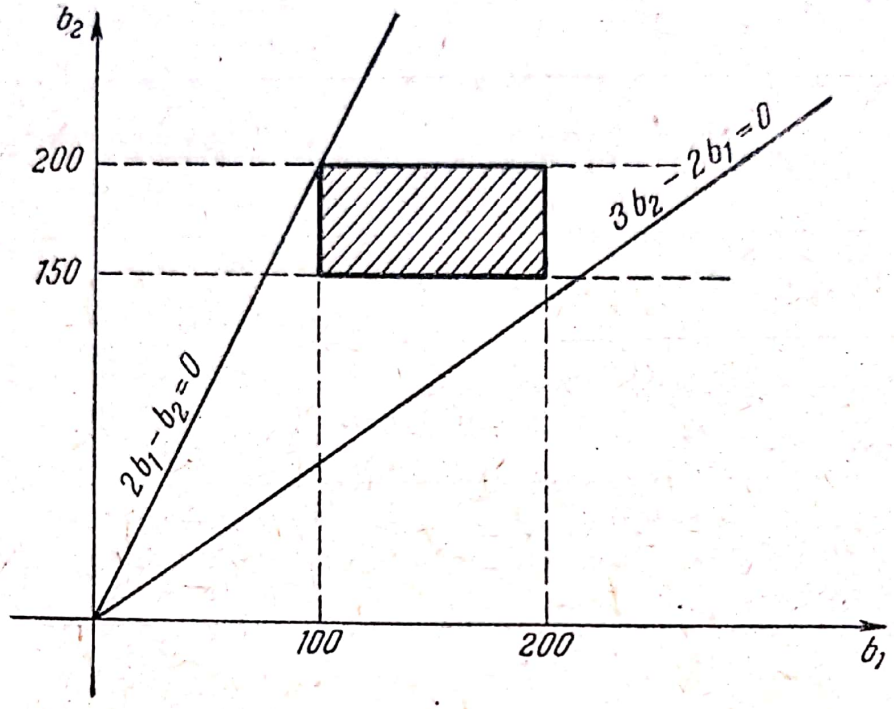

Fig. 9.

ghiul pe care ia valori vectorul b. Din fig. 9 se constată că mulţimea valorilor pe care le poate lua vectorul b este cuprinsă în mulţimea

$$2b_1 - b_2 \geqslant 0 \quad 3b_2 - 2b_1 \geqslant 0.$$

Din tabelul 14 se vede că baza formată de vectorii asociaţi variabilelor (x_1, x_3) este optimă în aceste condiţii deoarece valorile variabilelor sînt nenegative şi soluţia este dual realizabilă. Atunci

$$f(b, \mathbf{E}c) = \frac{1}{4}(6{,}2b_1 + 3{,}1b_2). \qquad \text{(I.3.31)}$$

Din (I.3.31) se calculează

$$\mathbf{E}_b f(b, \mathbf{E}c) = \int_{100}^{200} \int_{150}^{200} \frac{1}{4}(6{,}2b_1 + 3{,}1b_2) \frac{1}{100} db_1 \frac{1}{50} db_2 = 368{,}125.$$

Pentru a calcula $f(b, c)$ vom studia toate bazele realizabile ale sistemului (I.3.28) ţinînd seama numai de faptul că $b \geqslant 0$. Prin metoda simplex se stabileşte cu uşurinţă că problema admite opt baze realizabile. Tabelul 15 cuprinde bazele realizabile, expresia funcţiei obiec-

tiv în fiecare din aceste baze, condiţiile corespunzătoare de optimalitate şi vectorii c pentru care bazele sînt dual realizabile adică diferenţele $z_j - c_j$ corespunzătoare vectorilor care nu aparţin bazei sînt nenegative.

(15)

Baza formată de vectorii	Funcţia $f(b, c)$	Condiţii de nenegativitate a soluţiei	Condiţii pentru ca soluţia să fie dual-realizabilă	Vectorii c pentru care baza este dual realizabilă
$(x_1 \zeta_2)$	$f_1 = \frac{b_1 c_1}{3}$	$3b_2 - 2b_1 \geq 0$	$2c_1 - 3c_2 \geq 0$ $c_1 - 3c_3 \geq 0$	–
$(x_1 x_3)$	$f_2 = \frac{1}{4}[c_1(2b_1 - b_2) + c_3(3b_2 - 2b_1)]$	$2b_1 - b_2 \geq 0$ $3b_2 - 2b_1 \geq 0$	$2c_3 - c_2 \geq 0$ $c_1 - c_3 \geq 0$ $3c_3 - c_1 \geq 0$	(6, 5, 3) (7, 5, 4)
$(x_1 x_2)$	$f_3 = \frac{1}{8}[2c_1(2b_1 - b_2) + c_2(3b_2 - 2b_1)]$	$2b_1 - b_2 \geq 0$ $3b_2 - 2b_1 \geq 0$	$c_2 - 2c_3 \geq 0$ $2c_1 - c_2 \geq 0$ $-2c_1 + 3c_2 \geq 0$	(5, 4, 1)
$(x_2 \zeta_1)$	$f_4 = \frac{b_2 c_2}{4}$	$b_2 - 2b_1 \geq 0$	$c_2 - 2c_1 \geq 0$ $c_2 - 2c_3 \geq 0$	–
$(x_2 \zeta_2)$	$f_5 = \frac{b_1 c_2}{2}$	$b_2 - 2b_1 \geq 0$	$3c_2 - 2c_1 \geq 0$ $c_2 - 2c_3 \geq 0$	(5, 4, 1)
$(x_3 \zeta_2)$	$f_6 = b_1 c_3$	$b_2 - 2b_1 \geq 0$	$3c_3 - c_1 \geq 0$ $2c_3 - c_2 \geq 0$	(6, 5, 3) (7, 5, 4)
$(x_3 \zeta_1)$	$f_7 = \frac{b_2 c_3}{2}$	$2b_1 - b_2 \geq 0$	$c_3 - c_1 \geq 0$ $2c_3 - c_2 \geq 0$	–
$(x_1 \zeta_1)$	$f_8 = \frac{b_2 c_1}{2}$	$2b_1 - 3b_2 \geq 0$	$2c_1 - c_2 \geq 0$ $c_1 - c_3 \geq 0$	(5, 4, 1) (6, 5, 3) (7, 5, 4)

Ţinînd seama de distribuţia vectorului b, rezultă că problema admite soluţii numai pentru bazele în care sînt îndeplinite condiţiile

$$2b_1 - b_2 \geq 0 \text{ şi (sau) } 3b_2 - 2b_1 \geq 0.$$

Din tabelul 15 se vede că bazele care îndeplinesc aceste condiţii sînt formate din vectorii asociaţi variabilelor $(x_1\ \zeta_2)$; $(x_1 x_3)$; $(x_1 x_2)$ şi $(x_3\ \zeta_1)$.

Ţinînd seama de valorile pe care le poate lua vectorul c se vede că, dintre aceste baze, singurele care corespund unor soluţii dual realizabile sînt $(x_1 x_3)$ şi $(x_1 x_2)$ astfel încît $f(b,c) = f_2$ sau f_3.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $c = (6, 5, 3)$

$$\mathbf{E}_b f(b, c) = \frac{1}{4} \int_{100}^{200} db_1 \int_{150}^{200} [6(2b_1 - b_2) + 3(3b_2 - 2b_1)] db_2 = 356{,}25.$$

Calculînd în mod analog valorile medii pentru $c = (7, 5, 4)$ și $c = (5, 4, 1)$ găsim:

$$\mathbf{E}_b f(b, c) = \begin{cases} 356{,}25 & \text{pentru } c = (6, 5, 3) \\ 443{,}75 & c = (7, 5, 4) \\ 268{,}75 & c = (5, 4, 1) \end{cases}$$

Acum se obține cu ușurință

$$\mathbf{E}_c \mathbf{E}_b f(b, c) = 0{,}1 \cdot 268{,}75 + 0{,}6 \cdot 356{,}25 + 0{,}3 \cdot 443{,}75 = 373{,}75.$$

Deoarece s-a găsit $\mathbf{E}_b f(b, \mathbf{E}c) = 368{,}125$ rezultatele verifică relația (I.3.26). Variabilele b și c fiind independente valorile medii $\mathbf{E}_c \mathbf{E}_b f(b,c)$ și $\mathbf{E}_b \mathbf{E}_c f(b,c)$ sînt egale, totuși vom calcula și $\mathbf{E}_b \mathbf{E}_c f(b,c)$. In acest scop se citesc din tabelul 15 bazele dual realizabile pentru valorile pe care le poate lua vectorul c. Aceste baze sînt $(x_1 x_3)$; $(x_1 x_2)$; $(x_2 \zeta_2)$; $(x_3 \zeta_2)$ și $(x_1 \zeta_1)$. Dintre aceste baze numai $(x_1 x_3)$ și $(x_1 x_2)$ conduc la soluții nenegative pentru valorile pe care le poate lua vectorul b. Astfel avem $f(b, c) = f_2$ sau f_3 încît

$$\mathbf{E}_c f(b, c) = 0{,}1 \cdot \frac{1}{8} [10(2b_1 - b_2) + 4(3b_2 - 2b_1)] +$$

$$+ 0{,}6 \cdot \frac{1}{4} [6(2b_1 - b_2) + 3(3b_2 - 2b_1)] + 0{,}3 \cdot \frac{1}{4} [7(2b_1 - b_2) +$$

$$+ 4(3b_2 - 2b_1)] = \frac{1}{20} (30 b_1 + 17 b_2) \text{ și}$$

$$\mathbf{E}_b \mathbf{E}_c f(b,c) = \frac{1}{20} \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{100} \int_{100}^{200} db_1 \cdot \int_{150}^{200} (30b_1 + 17b_2) db_2 = 373{,}75.$$

Soluțiile problemei (I.3.30) se pot deduce din tabelul 15 astfel: avînd $\mathbf{E}b_1 = 150$ și $\mathbf{E}b_2 = 175$ problema admite soluții nenegative pentru bazele formate din vectorii $(x_1 \zeta_2)$; $(x_1 x_3)$; $(x_1 x_2)$ și $(x_3 \zeta_1)$. Valorile funcției obiectiv, în aceste baze, sînt:

$$f(\mathbf{E}b, c) = \begin{cases} \frac{1075}{4} & \text{dacă } c = (5, 4, 1) \\ \frac{1425}{4} & \text{dacă } c = (6, 5, 3) \\ \frac{1775}{4} & \text{dacă } c = (7, 5, 4). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\mathbf{E}_c f(\mathbf{E}b, c) = 373{,}75.$$

Observăm că în cazul acesta inegalitatea (I.3.27) devine chiar egalitate.

§ 4. TEOREME DE CONVEXITATE

Să admitem că într-o problemă de programare liniară, în care vectorul necunoscut x este interpretat ca un plan de producție, sistemul de restricții este de forma

$$Ax = b$$

$$x \geqslant 0.$$

Vectorul b poate fi privit ca „disponibilul de resurse" folosite în producție sau ca „cererea pieței" pentru produsele din plan. Dacă planificatorul alege un anumit plan de producție x° înainte ca disponibilul de resurse să fie cunoscut, e logic să admitem că unele resurse vor depăși necesarul iar altele vor fi deficitare. În limbaj matematic situația se reflectă în modul următor: unele dintre relațiile sistemului $Ax = b$ pentru $x = x^\circ$ se transformă în

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 > b_i; \qquad i = 1, \ldots, k, \; k < m$$

iar altele în

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i; \qquad i = k+1, \ldots, m.$$

Planificatorul va hotărî atunci completarea necesarului acolo unde disponibilul este deficitar și, să spunem, stocarea sau soldarea resurselor excedentare. Aceste modificări se exprimă prin adăogarea unor variabile $y_i < 0$ pentru indicii $i = 1, \ldots, k$ și $y_i > 0$ pentru $i = k+1, \ldots, m$, încît sistemul de restricții este acum de forma

$$Ax^\circ + y = b$$

$$y \text{ oarecare.}$$

Hotărîrile luate se reflectă și în costul total al producției care ia valoarea cx° pentru planul de producție x°. Dacă se notează cu f

vectorul cheltuielilor impuse de modificările survenite, funcţia economică ataşată modelului este

$$c(x^\circ, y) = cx^\circ + fy.$$

Se poate afirma

Teorema I. Pentru un b dat funcţia

$$C(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + y = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.1)}$$

este o funcţie convexă de x.

Demonstraţie. Se ştie că o funcţie $F(x)$ este convexă dacă pentru orice x' şi x'' din domeniul de definiţie al funcţiei şi pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ este satisfăcută inegalitatea

$$F(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leqslant \lambda F(x') + (1 - \lambda)F(x'').$$

Prin urmare, pentru a dovedi că funcţia $C(b, x)$ este convexă, trebuie arătat că pentru oricare vectori nenegativi x', x'' şi $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ avem

$$C(b, \lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leqslant \lambda C(b, x') + (1 - \lambda)C(b, x'') \quad \text{(I.4.2)}$$

în care

$$C(b, \lambda x' + (1-\lambda)x'') = \{\min_y [c(\lambda x' + (1-\lambda)x'') + fy] | A(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + y = b\} \quad \text{(I.4.3)}$$

$$C(b, x') = \{\min_y (cx' + fy) | Ax' + y = b\} \quad \text{(I.4.4)}$$

$$C(b, x'') = \{\min_y (cx'' + fy) | Ax'' + y = b\}. \quad \text{(I.4.5)}$$

Fie y' şi y'' vectorii care realizează minimile funcţiilor $cx' + fy$ şi $cx'' + fy$ pentru un b dat. Vectorii y' şi y'' satisfac sistemele de restricţii ale problemelor respective încît

$$Ax' + y' = b \quad \text{şi} \quad Ax'' + y'' = b.$$

Însumînd aceste egalităţi înmulţite respectiv cu $\lambda \in [0,1]$ şi $(1 - \lambda)$ avem

$$A(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + \lambda y' + (1 - \lambda)y'' = b.$$

De aici rezultă că vectorul

$$y = \lambda y' + (1 - \lambda)y'' \quad \text{(I.4.6)}$$

este o soluţie a sistemului

$$A(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + y = b$$

Scanned with OKEN Scanner

care constituie restricţiile problemei (I.4.3). Funcţia obiectiv a acestei probleme ia valoarea

$$c(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + f(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') = \lambda(cx' + fy') + \\ + (1 - \lambda)(cx'' + fy'') \qquad (I.4.7)$$

pentru soluţia $y = \lambda y' + (1 - \lambda)y''$. Această soluţie nu este însă necesar optimă încît

$$\min_y [c(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + fy] \leqslant c[\lambda x' + (1 - \lambda)x''] + \\ + f(\lambda y' + (1 - \lambda)y''). \qquad (I.4.8)$$

Înlocuind membrul drept al inegalităţii (I.4.8) prin valoarea dată de relaţia (I.4.7) se obţine inegalitatea

$$\min_y [c(\lambda x' + (1 - \lambda)x'' + fy] \leqslant \lambda(cx' + fy') + \\ + (1 - \lambda)(cx'' + fy''). \qquad (I.4.9)$$

Din definiţia vectorilor y' şi y'' avem

$$cx' + fy' = C(b, x')\,;\; cx'' + fy'' = C(b, x'')$$

încît din (I.4.9) rezultă că $C(b, x)$ este o funcţie convexă de x.

În problemele de programare matricea A, numită matricea coeficienţilor tehnologici, este formată din elementele a_{ij} care pot fi interpretate din punct de vedere economic ca fiind coeficienţii de utilizare a maşinilor folosite în producţie sau consumurile specifice de materii prime pe unitatea de produs. În unele cazuri aceşti „coeficienţi de consum" sînt variabile aleatoare încît sistemul de restricţii al unei probleme de programare poate fi stochastic fie că b este aleator, fie că A conţine elemente aleatoare, fie că sînt îndeplinite ambele condiţii. De exemplu, dacă trebuie stabilit nivelul producţiei $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru produsele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ care necesită utilizarea maşinilor-unelte $M_1, M_2, \ldots, M_m$ şi dacă timpul de prelucrare a_{ij} a unei unităţi de produs P_j pe maşina M_i depinde de gradul de uzură a utilajului, iar numărul de ore b_i în care M_i poate funcţiona depinde de reparaţiile pe care aceasta le va solicita, atunci atît matricea A cît şi vectorul b conţin elemente aleatoare.

Dacă se notează cu x° programul stabilit înainte de a cunoaşte valorile elementelor aleatoare şi cu y vectorul pentru care

$$Ax^\circ + y = b$$

cînd a_{ij} şi b_i iau valori determinate, se demonstrează

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II. Funcţia $C(A, b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax^\circ + y = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ este o funcţie convexă de a_{ij} şi b_i, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Demonstraţie. Fie A_1 şi A_2 două valori oarecare ale matricei A; b_1 şi b_2 valori ale vectorului b şi

$$A_0 = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, \quad b_0 = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$$

Vom nota cu

$$C(A_1, b_1, x) = \{\min_y (cx + fy) | A_1 x + y = b_1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\} \qquad \text{(I.4.10)}$$

$$C(A_2, b_2, x) = \{\min_y (cx + fy) | A_2 x + y = b_2, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\} \qquad \text{(I.4.11)}$$

$$C(A_0, b_0, x) = \{\min_y (cx + fy) | A_0 x + y = b_0, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}. \qquad \text{(I.4.12)}$$

$C(A, b, x)$ este o funcţie convexă de A şi b pentru orice x dacă

$$C(A_0, b_0, x) \leqslant \lambda C(A_1, b_1, x) + (1 - \lambda)C(A_2, b_2, x).$$

Pentru a stabili această inegalitate să notăm cu y' şi y'' soluţiile optime ale problemelor (I.4.10) şi (I.4.11) pentru un x dat. Astfel avem

$$A_1 x + y' = b_1 \qquad C(A_1, b_1, x) = cx + fy'$$
$$A_2 x + y'' = b_2 \qquad C(A_2, b_2, x) = cx + fy''.$$

Din aceste relaţii se deduce cu uşurinţă că

$$A_0 x + \lambda y' + (1 - \lambda)y'' = b_0$$

încît $y = \lambda y' + (1 - \lambda)y''$ este o soluţie pentru sistemul de restricţii al problemei (I.4.12). Valoarea funcţiei obiectiv a acestei probleme pentru $y = \lambda y' + (1 - \lambda)y''$ este $\lambda C(A_1, b_1, x) + (1-\lambda)C(A_2, b_2 x)$ dar y poate să nu fie soluţia optimă pentru (I.4.12) încît

$$C(A_0, b_0, x) \leqslant \lambda C(A_1, b_1, x) + (1 - \lambda)C(A_2, b_2, x).$$

În cele ce urmează vom considera o nouă formulare a problemelor de programare stochastică cu restricţii aleatoare.

G. B. Dantzig şi A. R. Ferguson [16], [20] studiind alocarea avioanelor de pasageri pe rutele aeriene ajung la o problemă de programare stochastică — mai corect de programare în condiţii de incertitudine — în care cererea este aleatoare. Deocamdată noi vom considera cunoscută distribuţia cererii încît încadrăm problema în programarea stochastică.

Scanned with OKEN Scanner

Formularea temei este următoarea: dispunînd de un număr dat de avioane de diferite tipuri, se cere repartizarea lor pe rute aeriene pe care numărul pasagerilor constituie o variabilă aleatoare, astfel ca beneficiul mediu realizat să fie maxim. Această problemă se încadrează într-o clasă de probleme cu următoarele caracteristici:

a) se pot alege diferite nivele de desfăşurare a activităţilor compatibile cu resursele disponibile;

b) fiecare plan de acţiune procură anumite avantaje şi satisface o cerere aleatoare a cărei distribuţie este presupusă cunoscută;

c) beneficiul obţinut depinde de costul producţiei, de măsura în care a fost satisfăcută cererea cît şi de stocurile constituite după satisfacerea cererii.

În limbajul teoriei jocurilor, aceste probleme constituie jocuri contra „naturii". „Natura", sau dacă preferăm „întîmplarea" fixează valoarea elementului aleator b, fie înainte, fie după ce „planificatorul" a ales pe x. Dacă x trebuie ales înainte ca b să fie cunoscut, se va considera ca soluţie optimă acea care maximizează (sau minimizează) valoarea medie a funcţiei economice. O astfel de soluţie este denumită de J. P. Brans [8] o soluţie Bayes.

Determinarea soluţiei se obţine rezolvînd un *program liniar stochastic cu două stadii.*

Programul liniar $\{\max cx | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ în care vectorul b este aleator se înlocuieşte cu programul liniar stochastic în două stadii

$$\begin{gathered} Ax + Ty = b \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ \max\ (\min)\ \{cx + fy\} \end{gathered} \qquad \text{(I.4.13)}$$

în care A este o matrice $m \times n_1$; T o matrice $m \times n_2$; c un vector $1 \times n_1$; f un vector $1 \times n_2$. Elementele matricelor A, T şi componentele vectorilor c, f sînt constante. Vectorul b are m componente care sînt variabile aleatoare. Se poate admite că toate componentele lui b sînt mutual independente după cum se poate considera că această condiţie nu este îndeplinită. În sfîrşit, x şi y sînt vectori necunoscuţi cu respectiv n_1 şi n_2 elemente.

Vectorul y este nenegativ dacă se scrie $y = y^+ - y^-$ unde y^+, $y^- \geqslant 0$. Această substituţie este folosită în problemele de programare în care unele variabile nu sînt supuse condiţiilor de nenegativitate.

Soluţia Bayes a modelului (I.4.13) se găseşte prin următoarele operaţii:

a. Pentru o valoare oarecare a vectorului b, notată cu b°, şi un program realizabil x°, se determină vectorul y care realizează

$$\{\max_y (cx^\circ + fy) | Ax^\circ + Ty = b^\circ,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}. \qquad \text{(I.4.14)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul acestei operații este evident o funcție de b și x pe care o vom nota cu $F(b, x)$.

b. Presupunînd că se cunoaște distribuția $H(b)$ a vectorului b, se calculează valoarea medie a funcției $F(b, x)$

$$\mathbf{E}F(b,x) = \mathbf{E}\{\max_y(cx^\circ + fy)|Ax + Ty = b, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \quad (I.4.15)$$

c. Se determină vectorul x care realizează

$$\max_x \mathbf{E}F(b, x) = \max_x E\{\max_y(cx + fy)|Ax + Ty = b, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}. \quad (I.4.16)$$

În unele cazuri se poate considera ca soluție vectorul aleator x care maximizează funcția $F(b, x)$ adică se determină

$$\max_x F(b, x) = \max_x\{\max_y(cx + fy)|Ax + Ty = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}. \quad (I.4.17)$$

Prin acest procedeu programul liniar stochastic (I.4.13) se înlocuiește prin programul (I.4.16) sau (I.4.17). Aceste programe au restricții liniare dar funcțiile obiectiv $\mathbf{E}F(b, x)$ sau $F(b, x)$ sînt funcții concave de x așa cum se va arăta ulterior.

În cele ce urmează se presupune că problema are totdeauna o soluție. Aceasta echivalează cu condiția ca sistemul de ecuații

$$Ty = Ax - b$$

să admită soluții nenegative pentru toate valorile pe care le poate lua vectorul aleator b și pentru orice program realizabil x.

Dacă nu toate elementele vectorului b sînt aleatoare, sistemul de restricții al problemei se descompune în două părți. Fie b_1 vectorul format din elemente deterministice ale vectorului b și b_2 vectorul format din elementele aleatoare; A_1 și A_2 matricele formate din liniile matricei A care corespund respectiv componentelor lui b_1 și b_2. Cu aceste notații modelul problemei este

$$\begin{aligned} A_1x &= b_1 \\ A_2x + Ty &= b_2 \\ x \geqslant 0, \; y &\geqslant 0 \\ \max_{x,y}(\min)\{cx + fy\}. & \end{aligned} \quad (I.4.18)$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema III. Pentru orice b dat funcţia

$$G(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.19)}$$

este o funcţie convexă de x dacă pentru orice $x \geqslant 0$ şi b dat sistemul de ecuaţii $Ty = b - Ax$ admite o soluţie $y \geqslant 0$. Această teoremă este o generalizare a teoremei I şi se demonstrează asemănător. De asemenea se poate stabili pe aceeaşi cale că

$$F(b, x) = \{\max_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.20)}$$

este o funcţie concavă de x.

Teorema IV. Fie $\mathbf{E}_b C(b, x)$ şi $\mathbf{E}_b G(b, x)$ mediile funcţiilor

$$C(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + y = b, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

$$G(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$$

relative la vectorul aleator b. Funcţiile $\mathbf{E}_b C(b, x)$ şi $\mathbf{E}_b G(b, x)$ sînt funcţii convexe de x. Justificarea acestei afirmaţii este imediată. În adevăr dacă vectorul b este o variabilă aleatoare discretă, $\mathbf{E}_b C(b, x)$ şi $\mathbf{E}_b G(b, x)$ sînt combinaţii liniare convexe de funcţii convexe. Dacă b este o variabilă aleatoare continuă cu valori într-un domeniu închis, convexitatea funcţiilor $\mathbf{E}_b C(b, x)$, $\mathbf{E}_b G(b, x)$ rezultă din proprietăţile integralelor care le definesc.

Analog se poate spune că $\mathbf{E}_b F(b, x)$ este o funcţie concavă de x, unde $F(b, x)$ este definit de (I.4.20).

Teorema V. $G(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ şi $\mathbf{E}G(b, x) = \mathbf{E}\{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$ sînt funcţii convexe de b.

Demonstraţie. Pentru un x realizabil şi două valori b_1, b_2 ale vectorului b definim

$$G(b_1, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b_1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.21)}$$

$$G(b_2, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b_2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.22)}$$

$$G(\lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2, \quad x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\} \quad \text{(I.4.23)}$$

pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie y' și y'' soluțiile optime pentru (I.4.21) și (I.4.22) deci

$$G(b_1, x) = cx + fy'$$
$$G(b_2, x) = cx + fy''.$$

De aici rezultă că

$$\lambda G(b_1, x) + (1 - \lambda)G(b_2, x) = cx + f(\lambda y' + (1 - \lambda)y''). \quad \text{(I.4.24)}$$

Pe de altă parte y' și y'' satisfac restricțiile problemelor respective încît

$$Ax + Ty' = b_1 \quad \text{(I.4.25)}$$
$$Ax + Ty'' = b_2 \quad \text{(I.4.26)}$$

Din egalitățile (I.4.25) și (I.4.26) rezultă că

$$Ax + T(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$$

deci vectorul $y = \lambda y' + (1 - \lambda)y''$ este o soluție a sistemului de restricții din problema (I.4.23) și $y \geqslant 0$ pentru orice $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Valoarea funcției obiectiv din (I.4.23) pentru y este

$$cx + f(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') \geqslant G(\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2, x) \quad \text{(I.4.27)}$$

deoarece y nu este obligatoriu soluția optimă. Din (I.4.24) și (I.4.27) rezultă inegalitatea

$$G(\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2, x) \leqslant \lambda G(b_1, x) + (1 - \lambda)G(b_2, x)$$

caracteristică funcțiilor convexe.

Convexitatea funcției $G(b, x)$ fiind dovedită, rezultă că $\mathbf{E}G(b, x)$ este o funcție convexă de b printr-o argumentație analogă celei din teorema IV.

Teorema VI. $\min_x G(b, x) = \min_x \{\min_y (cx + fy) \mid Ax + Ty = b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ și $\min_x \mathbf{E}G(b, x) = \min_x \mathbf{E}\{\min_y (cx + fy) \mid Ax + Ty = b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ sînt funcții convexe de b.

Demonstrație. Să considerăm problemele duale:

$$Ax + Ty = b \qquad zA \leqslant c$$
$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \quad \text{(I.4.28)} \qquad zT \leqslant f \quad \text{(I.4.29)}$$
$$\min_{x,y}(cx + fy) \qquad \max zb.$$

Fie z_1^* și z_2^* soluțiile optime ale problemelor obținute din modelul (I.4.29) dînd vectorului b valorile b_1 și b_2. Atunci

$$z_1^* A \leqslant c, \qquad z_1^* T \leqslant f, \qquad z_1^* b_1 = \min_x G(b_1, x)$$

$$z_2^* A \leqslant c, \qquad z_2^* T \leqslant f, \qquad z_2^* b_2 = \min_x G(b_2, x).$$

De aici rezultă că pentru orice $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ avem

$$\lambda z_1^* b_1 + (1 - \lambda) z_2^* b_2 = \lambda \min_x G(b_1, x) + (1 - \lambda) \min_x G(b_2, x). \quad \text{(I.4.30)}$$

Fie z^* soluția optimă a modelului (I.4.29) pentru $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$. Valoarea funcției economice pentru soluția optimă este

$$z^* b = \lambda z^* b_1 + (1 - \lambda) z^* b_2.$$

Deoarece z_1^* și z_2^* sînt soluțiile optime ale problemei (I.4.29) pentru $b = b_1$ și $b = b_2$ urmează că

$$z^* b_1 \leqslant z_1^* b_1 \text{ și } z^* b_2 \leqslant z_2^* b_2$$

încît

$$z^* b \leqslant \lambda z_1^* b_1 + (1 - \lambda) z_2^* b_2 \quad \text{(I.4.31)}$$

sau, ținînd seamă de egalitatea (I.4.30),

$$z^* b \leqslant \lambda \min_x G(b_1, x) + (1 - \lambda) \min_x G(b_2, x). \quad \text{(I.4.32)}$$

Pe de altă parte

$$z^* b = \min_x G(b, x)$$

încît din (I.4.32) rezultă că

$$\min_x G(b, x) \leqslant \lambda \min_x G(b_1, x) + (1 - \lambda) \min_x G(b_2, x).$$

Demonstrația convexității funcției $\min_x \mathbf{E} G(b, x)$ este asemănătoare cu cea precedentă.

Teorema VII. $\min_x G(b, x) = \min_x \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ și $\min_x \mathbf{E} G(b, x) = \min_x \mathbf{E} \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ sînt funcții continue de b.

Demonstrație. Fie $x_1 \geqslant 0$ o soluție a sistemului $Ax_1 \leqslant b$ și $x_2 \geqslant 0$ o soluție a sistemului $Ax_2 \leqslant b_2$. Este ușor de verificat că vectorul $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ este o soluție a sistemului $Ax \leqslant b$ pentru

Scanned with OKEN Scanner

$b = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$. De aici rezultă că mulțimea vectorilor b pentru care problema $\min\limits_x G(b, x)$ admite o soluție este o mulțime convexă. Ținînd seama și de rezultatul teoremei VI se poate afirma că $\min\limits_x G(b,x)$ este o funcție convexă de b definită pe o mulțime convexă. În virtutea teoremelor de continuitate a funcțiilor convexe, rezultă că $\min\limits_x G(b, x)$ este continuă în orice punct interior al mulțimii pe care este definită.

Rămîne de stabilit continuitatea funcției $\min\limits_x G(b, x)$ în punctele frontieră ale mulțimii de definiție. Pentru aceasta să considerăm un punct b aparținînd frontierei și un șir $\{b_i\}$ care tinde către b cînd $i \to \infty$. Fie $x^*(b_i)$ vectorii nenegativi care satisfac sistemele $Ax \leqslant b_i$ și realizează $\min\limits_x G(b_i, x)$. Atunci

$$\lim_{i\to\infty} \min_x G(b_i, x) = \lim_{i\to\infty} G(b_i, x^*(b_i)) \geqslant \min_x G(\lim_{i\to\infty} b_i, x) =$$
$$= G(b, x^*(b)) = \min_x G(b, x).$$

De asemenea, în baza convexității funcției $\min\limits_x G(b_i, x)$ avem

$$\lim_{i\to\infty} \min_x G(b_i, x) \leqslant \min_x G(b, x)$$

prin urmare

$$\lim_{i\to\infty} \min_x G(b_i, x) = \min_x G(\lim_{i\to\infty} b_i, x).$$

§ 5. INEGALITĂȚI ÎN PROBLEME DE PROGRAMARE STOCHASTICĂ

Tema inegalităților ce se pot stabili în diferite probleme de programare liniară stochastică a fost studiată de S. Vajda [49] [50] și A. Madansky [31]. Rezultatele obținute de A. Madansky sînt generalizate de O. L. Mangasarian și J. B. Rosen [33] pentru problemele neliniare de programare stochastică.

Teorema IV, § 2 și teoremele III, IV § 3 s-au ocupat de inegalități în problemele de programare liniară avînd modelul

$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max \text{ sau } \min\ cx$$

în care:

— numai funcţia obiectiv este aleatoare, sau
— numai sistemul de restricţii este aleator, sau
— atît funcţia obiectiv cît şi sistemul de restricţii sînt aleatoare.

În cele ce urmează ne vom ocupa de probleme mai generale de programare stochastică ale căror modele sînt de forma

$$\begin{gathered} Ax + Dy = b \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ \min\,(cx + fy) \end{gathered} \tag{I.5.1}$$

unde:

A este o matrice de dimensiuni $m \times n$, ale cărei elemente a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ au valori determinate, $r(A) = m$;

D este o matrice de dimensiuni $m \times m$ cu elementele $d_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$; $d_{ij} = +1$ sau -1 dacă $i = j$;

b este un vector aleator cu m componente;

c şi f sînt vectori cu n respectiv m componente determinate. Dacă se exclude din modelul (I.5.1) condiţia de nenegativitate impusă vectorului y, matricea D se poate înlocui cu matricea unitate şi astfel se obţine problema

$$\begin{gathered} Ax + y = b \\ x \geqslant 0 \\ \min\ (cx + fy). \end{gathered} \tag{I.5.2}$$

Se poate dovedi că

$$\begin{aligned} &\{\min_x \mathbf{E}\,(cx + fy) | Ax + y = b,\ x \geqslant 0\} = \\ &= \{\min_x\,(cx + fy) | Ax + y = Eb,\ x \geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{I.5.3}$$

În adevăr, deoarece vectorul y nu este nenegativ, pentru orice $x \geqslant 0$ sistemul de restricţii al problemei (I.5.2) determină un vector

$$y = b - Ax$$

încît

$$\{\min_x \mathbf{E}(cx + fy) | Ax + y = b,\ x \geqslant 0\} = \{\min_x \mathbf{E}[cx + f(b - Ax)],$$
$$x \geqslant 0\} = \{\min_x [cx + f[\mathbf{E}b - Ax)],\ x \geqslant 0\} = \{\min_x cx + fy | Ax +$$
$$+ y = \mathbf{E}b,\ x \geqslant 0\}.$$

Teorema I. Oricare ar fi vectorul f, avem

$$\{\min_x \mathbf{E}(cx+fy)|Ax+y=b, x\geqslant 0\}\leqslant\{\min_x (cx+fy)|Ax+y=\\ =\mathbf{E}b,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\} \tag{I.5.4}$$

$$\{\min_x \mathbf{E}(cx+fy)|Ax+y=b, x\geqslant 0\}\leqslant\{\min_x cx|Ax=\mathbf{E}b, x\geqslant 0\}. \tag{I.5.5}$$

Demonstrație. Ținînd seama de identitatea (I.5.3), demonstrația inegalității (I.5.4) se reduce la a arăta că $\min_x(cx+fy)$ pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{gathered} Ax+y=\mathbf{E}b \\ x\geqslant 0 \\ y \text{ oarecare} \end{gathered} \tag{I.5.6}$$

este cel mult egal cu minimul acestei funcții pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{gathered} Ax+y=\mathbf{E}b \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0. \end{gathered} \tag{I.5.7}$$

Fie (x^*, y^*) soluția sistemului (I.5.7) care realizează minimul funcției $cx+fy$. Cuplul (x^*, y^*) satisface și sistemul (I.5.6) dar, deoarece acum vectorul y poate fi oarecare, pot exista soluții pentru care funcția $cx+fy$ să ia valori mai mici decît cx^*+fy^*.

Pentru a demonstra inegalitatea (I.5.5) este suficient să arătăm că

$$\{\min_x(cx+fy)|Ax+y=\mathbf{E}b, x\geqslant 0\}\leqslant\{\min_x cx|Ax=\mathbf{E}b, x\geqslant 0\}. \tag{I.5.8}$$

În adevăr, dacă x^* este un vector nenegativ care satisface sistemul $Ax=\mathbf{E}b$ și minimizează funcția cx, cuplul $(x^*, y=0)$ este o soluție a sistemului $Ax+y=\mathbf{E}b$ dar această soluție nu este necesar optimă încît

$$\min_x (cx+fy)\leqslant cx^*.$$

Exemplul I. Să se verifice identitatea (I.5.3) pentru problema de programare liniară stochastică cu modelul

$$\begin{gathered} 3x_1+5x_2-2x_3+y_1=b_1, \\ x_1-x_2+3x_3+y_2=b_2 \\ x_1\qquad\qquad\qquad\geqslant 5 \\ x_2\qquad\qquad\qquad\geqslant 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \\ y_1,\ y_2 \text{ oarecare} \\ z=\min_x \mathbf{E}(x_1-2x_2-x_3+2y_1-4y_2) \end{gathered} \tag{I.5.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care b_1 și b_2 sînt variabile aleatoare cu valorile medii $\mathbf{E}b_1 = 4$, $\mathbf{E}b_2 = 3$. Din primele ecuații ale sistemului de restricții avem

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 - 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= b_2 - x_1 + x_2 - 3x_3 \end{aligned} \tag{I.5.10}$$

încît problema (I.5.9) se poate scrie sub forma

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 5\,;\ x_2 \geqslant 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \\ z = \min\,(-x_1 - 16x_2 + 15x_3) + 2\mathbf{E}b_1 - 4\mathbf{E}b_2. \end{gathered}$$

E ușor de văzut că soluția optimă este $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ încît minimul funcției obiectiv este $z = -21 + 8 - 12 = -25$

Problema cu modelul

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + y_1 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + y_2 &= 3 \\ x_1 &\geqslant 5 \\ x_2 &\geqslant 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqslant 0 \\ y_1,\ y_2 &\text{ oarecare} \\ \min_x(x_1 - 2x_2 - x_3 + 2y_1 - 4y_2) & \end{aligned} \tag{I.5.11}$$

este echivalentă cu

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 5 \\ x_2 \geqslant 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \\ \min(-x_1 - 16x_2 + 15x_3 - 4) \end{gathered} \tag{I.5.12}$$

a cărei soluție optimă este $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ iar minimul funcției obiectiv este egal cu -25 încît identitatea propusă se verifică.

Exemplul II. Să se verifice inegalitatea (I.5.4) pentru problema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + y_1 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + y_2 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leqslant 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqslant 0 \\ y_1,\ y_2 &\text{ oarecare} \\ z = \min_x \mathbf{E}(x_1 - x_2 + fy_1 + 2y_2) & \end{aligned} \tag{I.5.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care b_1 şi b_2 sînt variabile aleatoare cu valorile medii $\mathbf{E}b_1 = 4$, $\mathbf{E}b_2 = 3$ iar f este un parametru cu valori pe mulţimea numerelor reale.

Problema (I.5.13) este echivalentă cu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leqslant 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.5.14}$$

$$z = \min\{-(3f+1)x_1 - (5f-1)x_2 + (2f-6)x_3 + 4f + 6\}$$

Dacă se notează cu ζ_1 şi ζ_2 variabilele de abatere din restricţiile modelului (I.5.14) soluţiile optime sînt cele date în tabelul 16.

(16)

Valorile variabilelor					Valorile funcţiei obiectiv	Valorile parametrului f
x_1	x_2	x_3	ζ_1	ζ_2		
0	0	5	0	17	$14f - 24$	$f \leqslant 1$
0	$17/4$	$3/4$	0	0	$\frac{1}{4}(-63f + 23)$	$f \geqslant 1$

Să considerăm acum problema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + y_1 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + y_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leqslant 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2 &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.5.15}$$

$$\min_x (x_1 - x_2 + fy_1 + 2y_2).$$

Notînd cu η_1 şi η_2 variabilele nenegative care transformă inegalităţile sistemului de restricţii în ecuaţii, se găsesc următoarele soluţii optime (vezi tabelul 17).

(17)

Valorile variabilelor							Valorile funcţiei obiectiv	Valorile parametrului f
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	η_1	η_2		
0	0	1	6	0	4	5	$6f$	$f \leqslant -\frac{3}{13}$
0	$18/13$	$19/13$	0	0	$28/13$	5	$-18/13$	$f \geqslant -\frac{3}{13}$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru verificarea inegalității (I.5.4) trebuie arătat că

$$\text{dacă } f \leqslant -\frac{3}{13} \qquad \text{atunci } 14f - 24 \leqslant 6f$$

$$\text{dacă } -\frac{3}{13} \leqslant f \leqslant 1 \qquad \text{atunci } 14f - 24 \leqslant -\frac{18}{13}$$

$$\text{dacă } f \geqslant 1 \qquad \text{atunci } \frac{1}{4}(-63f + 23) \leqslant -\frac{18}{13}.$$

Se constată cu ușurință că aceste inegalități sînt satisfăcute.

Exemplul III. Să se verifice inegalitatea (I.5.5) pe modelul (I.5.13). Pentru aceasta vom mai rezolva problema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leqslant 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqslant 0 \\ \min(x_1 - x_2). & \end{aligned} \qquad \text{(I.5.16)}$$

Folosind algoritmul simplex se găsește că soluția optimă este $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{18}{13}$, $x_3 = \frac{19}{13}$ și minimul funcției obiectiv este $-\frac{18}{13}$ încît inegalitatea propusă se verifică deoarece:

$$\text{pentru } f \leqslant 1 \qquad \text{avem } 14f - 24 \leqslant -\frac{18}{13}$$

$$\text{și pentru } f \geqslant 1 \qquad \text{avem } \frac{1}{4}(-63f + 23) \leqslant -\frac{18}{13}.$$

Interpretarea teoremei I. Să considerăm problemele deterministice

$$\begin{aligned} Ax + y &= \mathbf{E}b \\ x &\geqslant 0 \\ y &\text{ oarecare} \\ \min\ &(cx + fy) \end{aligned} \qquad \text{(I.5.17)}$$

$$\begin{aligned} Ax &= \mathbf{E}b \\ x &\geqslant 0 \\ \min\ &cx \end{aligned} \qquad \text{(I.5.18)}$$

Am văzut că dacă (x^*, y^*) este soluția optimă pentru (I.5.17) și x^{**} soluția optimă pentru (I.5.18) atunci

$$cx^* + fy^* \leqslant cx^{**}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat înseamnă că, oricare ar fi penalizările f pentru cazul în care planul de producţie nu ţine seama de disponibilul de resurse $\mathbf{E}b$, costul minim al producţiei este cel mult egal cu costul minim al producţiei obţinute în cazul în care disponibilul de resurse este folosit integral. Dacă disponibilul b este aleator, oricare ar fi distribuţia sa şi penalizările pentru nerespectarea restricţiilor, minimul valorii medii a costului producţiei este limitat superior de costul minim al producţiei obţinute folosind integral disponibilul de resurse.

Dacă se impune condiţia de nenegativitate vectorului y atunci $\min \mathbf{E}(cx + fy)$ pe mulţimea soluţiilor nenegative a sistemului $Ax + \overset{x}{+} y = b$ depinde de valorile lui f şi poate fi mai mare sau mai mic decît $\min cx$ pe mulţimea soluţiilor nenegative a sistemului $Ax = \mathbf{E}b$. Pentru verificarea acestei afirmaţii se propune

Exemplul IV. În problema de programare liniară stochastică

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + y_1 = b_1 \\ x_1,\ x_2,\ y_1 \geqslant 0 \qquad \text{(I.5.19)} \\ z = \min \mathbf{E}(-x_1 + 2x_2 + fy_1) \end{gathered}$$

b este o variabilă aleatoare cu distribuţie normală avînd $m=6$, $\sigma={}^{8}/_{9}$, f este un parametru cu valori în mulţimea numerelor reale.

Să se compare valorile minime ale funcţiei z cu minimul funcţiei obiectiv din modelul

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 = \mathbf{E}b \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \qquad \text{(I.5.20)} \\ w = \min(-x_1 + 2x_2). \end{gathered}$$

Determinăm intervalul în care este cuprins b cu probabilitatea 0,999995. Luînd

$$\mathbf{P}(|\zeta| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}999995$$

avem

$$-4{,}5 < \frac{l - m}{\sigma} < 4{,}5$$

încît

$$b \in [2,\ 10].$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece y_1 este nenegativ, rezultă că $b_1 - 2x_1 - x_2 \geqslant 0$. Problema (I.5.19) admite soluţii realizabile pentru orice $b \in (2,10)$ pe mulţimea $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$; $2 - 2x_1 - x_2 \geqslant 0$.

$$\mathbf{E}(-x_1 + 2x_2 + fy_1) = \mathbf{E}[-x_1 + 2x_2 + f(b_1 - 2x_1 - x_2)] =$$
$$= -x_1(1 + 2f) + x_2(2 - f) + 6f.$$

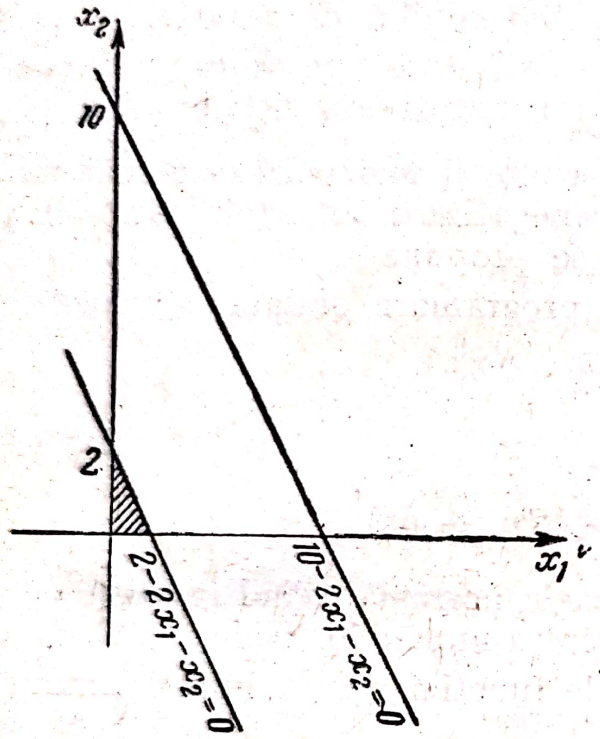

Fig. 10

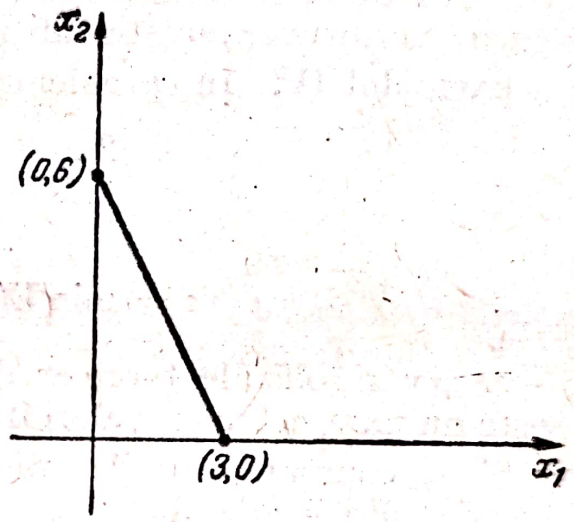

Fig. 11

Valorile acestei funcţii în punctele extreme ale poligonului soluţiilor realizabile sînt:

$$z_1(1,0) = 4f - 1; \qquad z_2(0,0) = 6f; \qquad z_3(2,0) = 4(f + 1).$$

Minimul funcţiei obiectiv este

$$z = 4f - 1 \qquad \text{dacă } f \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$z = 6f \qquad \text{dacă } f \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Soluţia optimă a problemei (I.5.20) în care $\mathbf{E}b = 6$ este $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ încît $w = -3$. E uşor de văzut că dacă $f \geqslant -\frac{1}{2}$ atunci $z > w$, dacă $f = -\frac{1}{2}$, $z = w$ şi dacă $f < -\frac{1}{2}$, $z < w$.

Un model mai general al problemelor de programare liniară stochastică se poate scrie sub forma

$$Ax + Ty = b$$
$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \qquad \text{(I.5.21)}$$
$$\min(\max) cx + fy.$$

Pentru a ajunge la concepţia acestui model vom trece în revistă diferitele moduri în care poate fi privită o problemă de programare stochastică. Să presupunem că în modelul

$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\min(\max) cx$$

unele sau toate elementele care constituie matricea A şi vectorii b, c sînt aleatoare. Dacă nu se cunosc valorile elementelor matricei A şi ale vectorului b în momentul în care trebuie determinată soluţia optimă x^* , este foarte probabil ca soluţia aleasă să nu verifice sistemul de restricţii pentru valorile particulare pe care le iau A şi b în momentul desfăşurării procesului de producţie. Adoptînd această atitudine planificatorul este imprudent. Dimpotrivă, dacă se consideră ca soluţie optimă vectorul x care realizează min (max) cx şi satisface sistemul de restricţii pentru toate cuplurile (A, b) posibile, planificatorul dă dovadă de o excesivă prudenţă deoarece este posibil ca problema să nu admită soluţii deşi formularea ei este corectă. Politica de aşteptare, aşa cum s-a mai spus în § 2, va conduce la determinarea legii de distribuţie a soluţiei optime cînd este cunoscută legea de distribuţie cumulativă pentru tripletul (A, b, c). O altă atitudine a planificatorului constă în a alege un vector nenegativ x° înainte de a cunoaşte valorile elementelor aleatoare şi, după ce sînt cunoscute aceste valori, să aleagă un vector y care compensează nepotrivirile dintre Ax° şi b. Spre deosebire de modelele (I.5.1) şi (I.5.2), y reprezintă acum un plan de producţie încît modelul obţinut este de forma (I.5.21). Este logic să presupunem că producţia planificată ulterior se obţine cu alte preţuri de cost încît vectorul f, asociat variabilei y în funcţia economică, poate fi privit ca vectorul costurilor de penalizare. Deoarece planificatorul dispune astfel de libertatea de a lua două hotărîri, acest mod de abordare conduce la *probleme cu două stadii*. Printre problemele care se încadrează în modele de forma (I.5.21) sînt problemele de inventar şi de stoc. Un exemplu ar fi următorul: utilajele unei întreprinderi pot prezenta defecţiuni de func-

Scanned with OKEN Scanner

ţionare în decursul unei perioade date de exploatare. Să presupunem că stocul de piese şi materiale necesare înlăturării defecţiunilor se procură trimestrial. Problema dimensionării optime a stocului poate fi formulată ca o problemă în două stadii în care comanda iniţială x° se face înainte de a cunoaşte necesarul de piese şi materiale. Vectorul y va reprezenta în acest caz piese şi materiale procurate în cursul trimestrului sau nefolosite în această perioadă. Lipsa unor piese din stoc atrage întîrzieri în repunerea utilajului în funcţiune încît provoacă pierderi chiar dacă se pot procura la acelaşi preţ ca în momentul constituirii stocului. Un stoc supradimensionat reprezintă imobilizarea inutilă a unei sume de bani. Aceste observaţii justifică adăogarea termenului fy în funcţia economică.

Soluţia optimă a unei probleme de programare liniară stochastică în două stadii este o soluţie Bayes adică un cuplu (x, y) care satisface restricţiile şi realizează

$$\min_x \mathbf{E} \min_y (cx + fy).$$

Pentru a simplifica scrierea, vom nota cu

$$G(b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} \qquad (I.5.22)$$

Admitem că pentru orice $x \geqslant 0$ şi pentru toate valorile pe care le ia b sistemul $Ty = b - Ax$ admite o soluţie $y \geqslant 0$.

Studiul problemelor de programare liniară stochastică în două stadii a fost dezvoltat în special pentru cazul în care numai vectorul b este aleator.

Notăm cu $\mathbf{E}b$ vectorul format din valorile medii ale componentelor vectorului aleator b. Fie

$$G(\mathbf{E}b, x) = \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = \mathbf{E}b, x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \qquad (I.5.23)$$

şi $x^*(\mathbf{E}b)$ vectorul care minimizează funcţia $G(\mathbf{E}b, x)$ deci

$$G(\mathbf{E}b, x^*(\mathbf{E}b)) = \min_x G(\mathbf{E}b, x).$$

Cu aceste notaţii se pot scrie următoarele inegalităţi stabilite de A. Madansky [31].

Teorema II.

$$\mathbf{E}G(b, x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}G(b, x) \geqslant \mathbf{E} \min_x G(b, x) \geqslant \min_x G(\mathbf{E}b, x). \qquad (I.5.24)$$

Operatorul $\mathbf{E}$ înseamnă aici valoarea medie în raport cu vectorul aleator b.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Pentru justificarea inegalității

$$\mathbf{E}G(b,\ x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}G(b,x) \tag{I.5.25}$$

reamintim că $x^*(\mathbf{E}b)$ este decizia care realizează

$$\min_x G(\mathbf{E}b,x) = \min_x \{\min_y (cx + fy) | Ax + Ty = \mathbf{E}b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

$G(b,x^*(\mathbf{E}b))$ este valoarea funcției $G(b,\ x)$ definită prin (I.5.22) pentru o valoare determinată $x^*(\mathbf{E}b)$ atribuită vectorului x. Este evident atunci că minimul funcției $\mathbf{E}G(b,\ x)$ este mai mic sau cel mult egal cu valoarea funcției $\mathbf{E}G(b,x)$ pentru orice $x \geqslant 0$ și în particular pentru $x = x^*(\mathbf{E}b)$.

Pentru a demonstra inegalitatea

$$\min_x \mathbf{E}\,G(b,x) \geqslant \mathbf{E} \min_x G(b,x) \tag{I.5.26}$$

se notează cu x^* vectorul care realizează $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$. Deoarece $x^*(b)$ este soluția care minimizează funcția $G(b,x)$, este evident că funcția $G(b,x)$ia o valoare mai mare sau cel puțin egală cu $G(b,\ x^*(b))$ pentru orice x și în particular pentru $x = x^*$ încît

$$G(b,\ x^*) \geqslant G(b,x^*(b)) \tag{I.5.27}$$

pentru toate valorile posibile ale vectorului aleator b. Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalității (I.5.27) avem

$$\mathbf{E}G(b,x^*) \geqslant \mathbf{E}G(b,x^*(b)). \tag{I.5.28}$$

Deoarece $\mathbf{E}G(b,x^*) = \min_x \mathbf{E}G(b,x)$ și $G(b,x^*(b)) = \min_x G(b,x)$ inegalitatea (I.5.28) este echivalentă cu (I.5.26).

Relația

$$\mathbf{E} \min_x G(b,\ x) \geqslant \min_x G(\mathbf{E}b,x) \tag{I.5.29}$$

a fost demonstrată de S. Vajda [50] pe baza proprietăților soluțiilor optime a unui cuplu de probleme duale și de A. Madansky [31] pe baza inegalității lui Jensen. În cele ce urmează vom reda ambele demonstrații.

Să considerăm cuplul de probleme duale

$$Ax + Ty = b \qquad zA \leqslant c$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \qquad \text{(I.5.30)} \qquad zT \leqslant f \qquad \text{(I.5.31)}$$

$$\min_{x,y} cx + fy \qquad \max\ zb.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie z^* soluția optimă a problemei (I.5.31) pentru o valoare determinată a vectorului b încît $z^*b \geqslant zb$. Se știe că

$$z^*b = \min_x G(b, x)$$

deci

$$\min G(b, x) \geqslant zb \tag{I.5.32}$$

pentru *orice* soluție a problemei duale (I.5.31). Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalității (I.5.32), avem

$$\mathbf{E} \min_x G(b,x) \geqslant \mathbf{E}(zb) = z\mathbf{E}b. \tag{I.5.33}$$

Fie $\bar{z}$ soluția optimă a problemei

$$\begin{gathered} zA \leqslant c \\ zT \leqslant f \\ \max z \cdot \mathbf{E}b. \end{gathered} \tag{I.5.34}$$

Este evident că $\bar{z}$ este o soluție și pentru (I.5.31) încît inegalitatea (I.5.33) pentru $z = \bar{z}$ este

$$\mathbf{E} \min_x G(b, x) \geqslant \bar{z} \cdot \mathbf{E}b. \tag{I.5.35}$$

Pe de altă parte, dualul modelului (I.5.34) este

$$\begin{gathered} Ax + Ty = \mathbf{E}b \\ x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \\ \min_{x,y}(cx + fy) \end{gathered} \tag{I.5.36}$$

încît

$$\bar{z} \cdot \mathbf{E}b = \min_x G(\mathbf{E}b, x). \tag{1.5.37}$$

Din relațiile (I.5.35) și (I.5.37) rezultă inegalitatea (I.5.29). A. Madansky stabilește aceeași relație pornind de la inegalitatea lui Jensen care afirmă că pentru orice funcție convexă și continuă $F(x)$ definită pe o mulțime convexă

$$\mathbf{E}F(x) \geqslant F(\mathbf{E}x). \tag{I.5.38}$$

Teoremele VI și VII din § 4 stabilesc că funcția $\min_x G(b,x)$ îndeplinește condițiile în care este satisfăcută inegalitatea lui Jensen încît

$$\mathbf{E} \min_x G(b, x) \geqslant \min_x G(\mathbf{E}b, x)$$

rezultă din (I.5.38) luînd $F(x) = \min_x G(b,x)$.

Scanned with OKEN Scanner

O altă demonstrație a inegalității (I.5.29) este următoarea: $\min_x G(b,x)$ este o funcție convexă de b astfel încît satisface relația

$$\min_x G(b,\ x) - \min_x G(\mathbf{E}b,\ x) \geqslant (b - \mathbf{E}b)\ \alpha(\mathbf{E}b) \qquad \text{(I.5.39)}$$

în care $\alpha(\mathbf{E}b)$ este un număr. Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalității (I.5.39) și ținînd seamă că $\min_x G(\mathbf{E}b,x)$ este o constantă în raport cu b, se obține relația

$$\mathbf{E} \min_x G(b,\ x) - \min_x G(\mathbf{E}b,\ x) \geqslant 0$$

care este echivalentă cu (I.5.29).

În problemele de programare liniară cu restricții stochastice în care se cere maximizarea funcției economice se notează cu

$$F(b,x) = \{\max_y (cx + fy) | Ax + Ty = b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

$$F(\mathbf{E}b,x) = \{\max_y (cx + fy) | Ax + Ty = \mathbf{E}b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

și astfel inegalitățile lui A. Madansky sînt:

$$\mathbf{E}F(b,x^*(\mathbf{E}b)) \leqslant \max_x \mathbf{E}F(b,x) \leqslant \mathbf{E} \max_x F(b,x) \leqslant \max_x F(\mathbf{E}b,x).$$

Analizînd relațiile (I.5.24) observăm că $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$ sau $\max_x \mathbf{E}F(b,x)$ sînt soluțiile Bayes ale problemelor corespunzătoare de programare stochastică în două stadii și că $\mathbf{E} \min_x G(b,x)$ sau $\mathbf{E} \max_x F(b,x)$ sînt valorile medii ale funcțiilor economice pentru soluții obținute adoptînd politica de așteptare. Din inegalitățile lui A. Madansky rezultă că soluția Bayes este preferabilă soluției găsite prin politica de așteptare. Dealtfel adoptînd politica de așteptare se poate calcula valoarea medie a funcției economice dar nu se determină și programul de activitate corespunzător acestei valori.

Înlocuind b prin media sa, $\mathbf{E}b$ se obține o problemă de programare liniară deterministică care dă cea mai mică valoare a funcției obiectiv în problemele de minimizare și cea mai mare în problemele de maximizare. Soluțiile corespunzătoare $x^*(\mathbf{E}b)$ nu sînt însă mai bune decît soluțiile Bayes deoarece inegalitățile lui Madansky arată că

$$\mathbf{E}G(b,x^*(b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}G(b,x)$$

$$\mathbf{E}F(b,x^*(b)) \leqslant \max_x \mathbf{E}F(b,x^*(b))$$

Scanned with OKEN Scanner

adică valoarea medie a funcției obiectiv este mai puțin favorabilă decît valoarea acestei funcții corespunzătoare soluției Bayes.

Rezumînd putem arăta că din inegalitățile lui Madansky reiese că politica cea mai bună de urmat în rezolvarea problemelor de programare stochastică în care b este aleator este determinarea soluției Bayes. Din inegalitățile (I.5.24) mai reiese că $\mathbf{E}G(b,\bar{x}^*(\mathbf{E}b)$ și $\min_x G(\mathbf{E}b,x)$, care se calculează relativ ușor, dau o margine superioară și o margine inferioară a funcției obiectiv atît pentru soluția Bayes $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$ cît și pentru media valorilor optime ale funcției economice $\mathbf{E}\min_x G(b,x)$ corespunzătoare politicii de așteptare.

Observația I. Dacă $\min_x G(b,x)$ este o funcție liniară de b și dacă b este o variabilă aleatoare definită pe un cîmp borelian de probabilitate atunci [19].

$$\mathbf{E}\min_x G(b,x) = \min_x G(\mathbf{E}b,x). \tag{I.5.40}$$

Observația II. Dacă $G(b,x) = G(b,x^*(b))$ aproape sigur sau, mai general, dacă $x^*(b) = x^*$ pentru toate valorile vectorului aleator b, atunci

$$\min_x \mathbf{E}\,G(b,x) = \min_x G(\mathbf{E}b,x). \tag{I.5.41}$$

Din (I.5.40) și (I.5.41) rezultă că, în condițiile stipulate,

$$\min_x \mathbf{E}G(b,x) = \mathbf{E}\min_x G(b,x) \tag{I.5.42}$$

adică, valoarea optimă a funcției obiectiv a problemei în două stadii este egală cu media valorii optime a funcției obiectiv a problemei rezolvate în condițiile politicii de așteptare.

Pentru verificarea inegalităților lui A. Madansky (teorema II) pe un exemplu numeric trebuie să dispunem de o metodă de rezolvare a programelor liniare în două stadii care să ne dea posibilitatea de a cunoaște $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$. Vom verifica totuși inegalitățile

$$\mathbf{E}G(b,x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \mathbf{E}\min_x G(b,x) \geqslant \min_x G(\mathbf{E}b,x) \tag{I.5.43}$$

pentru problema din

Exemplul V. Fiind dat sistemul de restricții

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 + 4y_1 - y_2 - y_3 &= b \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3 &= 10 \\ x \geqslant 0,\ y &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.5.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

și funcția economică

$$x_1 + x_2 - x_3 + y_1 - y_2 + 2y_3$$

să se verifice inegalitățile (I.5.43) pentru cazul în care b este o variabilă aleatoare continuă și uniform distribuită în intervalul [7,5 ; 8,5].

Vom calcula mai întîi $x^*(\mathbf{E}b)$. Deoarece $\mathbf{E}b = 8$, $x^*(\mathbf{E}b)$ este acel vector x pentru care se obține

$$\min_{x,\,y} (x_1 + x_2 - x_3 + y_1 - y_2 + 2y_3)$$

cu condițiile

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 4y_1 - y_2 - y_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3 = 10$$
$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Soluția acestei probleme se găsește prin metoda simplex după trei iterații și este: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = {}^{26}/_3$; $y_1 = 0$; $y_2 = {}^{2}/_3$; $y_3 = 0$ încît vectorul $x^*(\mathbf{E}b)$ are componentele $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = {}^{26}/_3$. Atunci

$$G(b,x^*(\mathbf{E}b) = \min_{y} \left(y_1 - y_2 + 2y_3 - \frac{26}{3}\right)$$

cu condițiile

$$4y_1 - y_2 - y_3 = b_1$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 10$$
$$y \geqslant 0.$$

Folosind algoritmul simplex găsim

$$G(b,x^*(\mathbf{E}b) = \begin{cases} -5b + \frac{92}{3} \text{ pentru } 7{,}5 \leqslant b \leqslant 8 \\ \frac{b}{3} - 12 \text{ pentru } 8 \leqslant b \leqslant 8{,}5 \end{cases}$$

încît valoarea medie a variabilei aleatoare $G(b,x^*(\mathbf{E}b)$ este

$$\mathbf{E}G(b,x^*(\mathbf{E}b)) = \int_{7,5}^{8} \left(-5b + \frac{92}{3}\right) db + \int_{8}^{8,5} \left(\frac{b}{3} - 12\right) db = -8,(6).$$

Valoarea $\min_x G(\mathbf{E}b,x)$ s-a găsit calculînd x^* $(\mathbf{E}b)$

$$\min_x G(\mathbf{E}b,x) = -{}^{28}/_3 = -9,(3).$$

Pentru a determina $\mathbf{E}\min_x G(b,x)$ se calculează

$$\min_{x,\,y}(x_1 + x_2 - x_3 + y_1 - y_2 + 2y_3)$$

cu condițiile (I.5.44) considerînd variabila aleatoare b ca un parametru cu valori în intervalul $[7{,}5\,;\,8{,}5]$. Soluția $x_1 = 0\,;\ x_2 = 0\,;\ x_3 = {}^{(2b+10)}/_3\, y_1 = 0\,;\ y_2 = {}^{(10-b)}/_3\,;\ y_3 = 0$ este optimă pentru $b \leqslant 10$ deci pentru toate valorile admisibile ale variabilei aleatoare b iar

$$\min_x G(b,x) = \frac{-b-20}{3} \text{ încît}$$

$$\mathbf{E}\min_x G(b,x) = \int_{7{,}5}^{8{,}5} \frac{-b-20}{3}\,db = \frac{-28}{3}.$$

Rezultatele găsite satisfac inegalitățile (I.5.43) deoarece

$$-8{,}(6) \geqslant -9{,}(3) \geqslant -9{,}(3).$$

(Ultima inegalitate se verifică cu semnul $=$).
Calculul valorii $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$ cere rezolvarea modelului

$$G(b,x) = \min_y (y_1 - y_2 + 2y_3) + x_1 + x_2 - x_3$$

cu condițiile

$$\begin{gathered} 4y_1 - y_2 - y_3 = b - 3x_1 + x_2 - x_3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 10 - x_1 - x_2 - x_3 \\ y \geqslant 0. \end{gathered}$$

Metoda simplex aplicată acestei probleme conduce la rezultatul următor

$$G(b,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(b - 10 + x_1 + 5x_2 - 3x_3) \text{ dacă } x \in \Gamma_1 \\ \qquad \text{unde } \Gamma_1 \text{ este } \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 10 + 2b_1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 40 - b_1 \end{cases} \\ -5b - 30 + 19x_1 - x_2 + 7x_3 \text{ dacă } x \in \Gamma_2 \\ \qquad \text{unde } \Gamma_2 \text{ este } \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 \geqslant 10 + 2b_1 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 10 + b_1. \end{cases} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Media variabilei aleatoare $G(b,x)$ astfel definită este:

$$\mathbf{E}G(b,\ x) = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{3}\ (b - 10 + x_1 + 5x_2 - 3x_3)db + \int_{\Gamma_2} (-5b - 30 + 19x_1 - x_2 + 7x_3)db.$$

Singura condiție de care trebuie să se țină seama în calcularea minimului funcției $\mathbf{E}G(b,x)$ este nenegativitatea vectorului x.

Problema determinării $\min_x \mathbf{E}G(b,x)$ sau, ceea ce este același lucru, metodele de rezolvare a problemelor de programare în două stadii, vor fi tratate în paragraful următor.

Inegalitățile lui Madansky care, așa cum s-a văzut, se referă la valorile optime ale funcției obiectiv în problemele de programare liniară stochastică sînt generalizate de O.L. Mangasarian și J.B. Rosen [33] pentru probleme de programare neliniară stochastică.

Interesul manifestat pentru aceste probleme se justifică prin importanța rezultatelor practice. În adevăr, ca și în cazul programelor liniare stochastice, stabilind unele inegalități se găsește posibilitatea de a calcula margini inferioare și superioare ale valorilor funcției obiectiv din programul stochastic tratat prin metoda politicii de așteptare și prin metoda în două stadii. Aceste limite se obțin rezolvînd programe deterministice.

În cele ce urmează problema de programare neliniară stochastică este formulată astfel: să se determine vectorii x și y care satisfac restricțiile

$$g(x) + h(y) \geqslant b \tag{I.5.45}$$

și realizează optimul funcției

$$\varphi(x) + \psi(y). \tag{I.5.46}$$

Prin optimul funcției (I.5.46) se înțelege

$$\mathbf{E} \min_x \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)\} \tag{I.5.47}$$

în cazul în care se adoptă politica de așteptare și

$$\min_x \mathbf{E} \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)\} \tag{I.5.48}$$

dacă problema se rezolvă în două stadii.

Rezultatele care se vor stabili în cele ce urmează sînt valabile cînd $g(x)$, $h(y)$ sînt funcții neliniare, precum și atunci cînd restricțiile sînt funcții liniare de vectorii x și y. Vectorul b este elementul aleator

din modelul problemei. Se presupune că există o mulțime convexă și nevidă X astfel încît, pentru orice $x \in X$ să existe un vector y care satisface restricțiile (I.5.45) oricare ar fi valoarea pe care o ia elementul aleator b. Vom spune că x este realizabil dacă aparține mulțimii X.

Pentru a simplifica expunerea vom nota

$$\gamma(b,x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)/g(x) + h(y) \geqslant b\}.$$

Teorema III. Funcția $\gamma(b,x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)|g(x) + h(y) \geqslant b\}$ este o funcție convexă de b dacă

(*i*) $h_i(y)$ $i = 1, \ldots, m$ sînt funcții concave de y iar

(*ii*) $\psi(y)$ este o funcție convexă de y pe mulțimea vectorilor y care satisface restricțiile.

Demonstrație. $\gamma(b, x)$ este o funcție convexă de b dacă pentru orice b_1, b_2 și $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ se verifică inegalitatea.

$$\gamma(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2, x) \leqslant \lambda\gamma(b_1,x) + (1-\lambda)\gamma(b_2,x) \qquad \text{(I.5.49)}$$

Fie y_1 și y_2 vectorii pentru care

$$\gamma(b_1,x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)|g(x) + h(y) \geqslant b_1\} \qquad \text{(I.5.50)}$$

$$\gamma(b_2,x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y)|g(x) + h(y) \geqslant b_2\}. \qquad \text{(I.5.51)}$$

y_1 și y_2 verifică sistemele de restricții ale problemelor (I.5.50) și (I.5.51) încît

$$h(y_1) \geqslant b_1 - g(x) \qquad \text{(I.5.52)}$$

$$h(y_2) \geqslant b_2 - g(x). \qquad \text{(I.5.53)}$$

În baza condiției (*i*) avem.

$$h(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant \lambda h(y_1) + (1-\lambda)h(y_2). \qquad \text{(I.5.54)}$$

Înmulțind relațiile (I.5.52) și (I.5.53) respectiv cu numerele nenegative λ și $(1-\lambda)$ și însumîndu-le avem

$$\lambda h(y_1) + (1-\lambda)h(y_2) \geqslant \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 - g(x). \qquad \text{(I.5.55)}$$

Din (I.5.54) și (I.5.55) rezultă inegalitatea

$$h(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 - g(x) \qquad \text{(I.5.56)}$$

care arată că $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ este o soluție a sistemului de restricții pentru $b = \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2$. Această soluție poate să nu fie soluția optimă a problemei

$$\min_y \{\varphi(x) + \psi(y)|g(x) + h(y) = \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2\}$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$\gamma(\lambda b_1+(1-\lambda)b_2,x) \leqslant \varphi(x)+\psi[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2] \qquad \text{(I.5.57)}$$

Condiția (*ii*) justifică inegalitatea

$$\psi[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2] \leqslant \lambda\psi(y_1)+(1-\lambda)\psi(y_2) \qquad \text{(I.5.58)}$$

încît din (I.5.50) și (I.5.51) rezultă că

$$\gamma(\lambda b_1+(1-\lambda)b_2,x) \leqslant \lambda\gamma(b_1,y_1)+(1-\lambda)\gamma(b_2,y_2). \qquad \text{(I.5.59)}$$

Teorema IV. Funcția $\gamma(b,x) = \min_y \{\varphi(x)+\psi(y) | g(x)+h(y) \; b\}$ este o funcție continuă de b dacă

(*i*) $h_i(y)$ $i = 1, \ldots, m$ sînt funcții concave și continue de y iar

(*ii*) $\theta(b,y) = \varphi(x)+\psi(y)$ este o funcție convexă și continuă de y pe mulțimea vectorilor y care satisface restricțiile.

Demonstrație. Din cele expuse anterior s-a văzut că dacă y_1 și y_2 sînt soluții ale sistemului de restricții respectiv pentru b_1, b_2 și un x arbitrar, admisibil, atunci vectorul $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$ este o soluție a sistemului

$$g(x) + h(y) \geqslant \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2.$$

De aici se deduce că

— mulțimea vectorilor b pentru care sistemul de restricții admite soluții este o mulțime convexă;

— funcția $\gamma(b,x)$ este definită pe o mulțime convexă de valori ale vectorului b;

— $\gamma(b,x)$ este o funcție convexă de b definită pe o mulțime convexă. Se știe că în aceste condiții $\gamma(b,x)$ este continuă în toate punctele interioare mulțimii pe care este definită. Rămîne de arătat că $\gamma(b,x)$ este continuă și pentru o valoare a vectorului b de pe frontiera mulțimii de definiție. Fie b^0 o astfel de valoare și $\{b^i\}$ un șir care tinde la b^0 cînd $i \to \infty$. Să notăm cu $y^{(i)}$ vectorul pentru care

$$\gamma(b^{(i)},x) = \min_y \{\varphi(x)+\psi(y) | g(x)+h(y) \geqslant b^{(i)}\}. \qquad \text{(I.5.60)}$$

$y^{(i)}$ verifică sistemul restricțiilor încît

$$g(x) + h(y^{(i)}) \geqslant b^{(i)}. \qquad \text{(I.5.61)}$$

Notînd cu $\overline{\lim}$, limita superioară, în baza condiției (*i*) avem

$$g(x) + h(\overline{\lim_{i\to\infty}} y^{(i)}) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} b^{(i)} \qquad \text{(I.5.62)}$$

încît $y = \overline{\lim_{i\to\infty}} y^{(i)}$ este o soluție a sistemului

$$g(x) + h(y) \geqslant b^0, \tag{I.5.63}$$

dar această soluție nu este obligată să realizeze minimul funcției obiectiv încît

$$\gamma(b^0, x) \leqslant \theta(b^0, \overline{\lim_{i\to\infty}} y^{(i)}). \tag{I.5.64}$$

În baza condiției (*ii*) avem

$$\theta(b^0, \overline{\lim_{i\to\infty}} y^{(i)}) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \theta(b^{(i)}, y^{(i)}) \tag{I.5.65}$$

încît din (I.5.64) și (I.5.65) rezultă că

$$\gamma(b^0, x) \leqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} \theta(b^{(i)}, y^{(i)}). \tag{I.5.66}$$

Pe de altă parte, din convexitatea lui $\gamma(b, x)$ avem

$$\gamma(b^0, x) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} \theta(b^{(i)}, y^{(i)}) \tag{I.5.67}$$

încît, din inegalitățile (I.5.66) și (I.5.67), se deduce că

$$\gamma(b^0, x) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \theta(b^{(i)}, y^{(i)}). \tag{I.5.68}$$

Analog se dovedește că

$$\gamma(b^0, x) = \underline{\lim_{i\to\infty}} \theta(b^{(i)}, y^{(i)}). \tag{I.5.69}$$

Din (I.5.68) și (I.5.69) rezultă că

$$\gamma(b^0, x) = \lim_{i\to\infty} \theta(b^{(i)}, y^{(i)})$$

deci $\gamma(b,x)$ este continuă și pe frontiera mulțimii vectorilor b, pe care este definită.

Teorema V. Funcția $\min_x \gamma(b,x) = \min_x \min_y \{\varphi(x)+\psi(y) | g(x)+h(y) \geqslant b\}$ este o funcție convexă de b dacă

(*i*) $g_i(x)$ și $h_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$ sînt funcții concave de argumentele lor iar (*ii*) $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ sînt funcții convexe de argumentele lor.

Demonstrația rezultă cu ușurință din teorema III dacă observăm că funcția $\gamma(b,x)$ joacă rolul funcției $\theta(b,y)$ și că prin condițiile (*i*),

(*ii*) ale teoremei V se asigură satisfacerea condiţiilor (*i*), (*ii*) din teorema III.

Teorema VI. Funcţia $\min_x \gamma(b,x) = \min_x \min_y \{\varphi(x)+\psi(y) | g(x)+h(y) \geqslant b\}$ este o funcţie continuă de b dacă

(*i*) $g_i(x)$ şi $h_i(y)$ $i = 1, \ldots, m$ sînt funcţii concave şi continue iar

(*ii*) $\varphi(x)$ şi $\psi(y)$ sînt funcţii convexe şi continue de argumentele lor.

Demonstraţia acestei teoreme este analogă cu cea a teoremei IV.

Teorema VII. Funcţia $\gamma(b,x) = \min_y \{\varphi(x)+\psi(y) | g(x)+h(y) \geqslant b\}$ şi $\mathbf{E}\gamma(b,x)$ sînt funcţii convexe de x pentru orice b dacă

(*i*) $g_i(x)$ şi $h_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$ sînt funcţii concave iar

(*ii*) $\varphi(x)$ şi $\psi(y)$ sînt funcţii convexe de argumentele lor.

Dovada convexităţii funcţiei $\gamma(b,x)$ în raport cu x pentru un b dat se obţine în acelaşi mod în care s-a arătat că $\gamma(b,x)$ este o funcţie convexă de b pentru un x admisibil (teorema III). $\mathbf{E}\gamma(b,x)$ fiind o combinaţie liniară convexă de funcţii convexe — dacă b este o variabilă aleatoare discretă — sau integrala unei funcţii convexe pe o mulţime convexă este de asemenea convexă.

Dacă se notează cu $x^*(\mathbf{E}b)$ vectorul care realizează

$$\min_x \gamma(\mathbf{E}b,x) = \min_x \min_y \{\varphi(x) + \psi(y) | g(x) + h(y) \geqslant \mathbf{E}b\}$$

se poate dovedi

Teorema VIII. $\mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \geqslant \mathbf{E}\min_x \gamma(b,x) \geqslant \min_x \gamma(\mathbf{E}b, x)$.

Ţinînd seama de definiţia funcţiei $\gamma(b,x)$ aceste inegalităţi stabilite de O.L.Mangasarian şi J.B.Rosen [33] constituie generalizarea inegalităţilor lui A.Madansky pentru problemele neliniare de programare stochastică.

Condiţiile

(*i*) $g_i(x)$ şi $h_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$ sînt funcţii concave şi continui;

(*ii*) $\varphi(x)$ şi $\psi(y)$ sînt funcţii convexe şi continui de argumentele lor sînt necesare numai pentru inegalitatea

$$\mathbf{E}\min_x \gamma(b, x) \geqslant \min_x \gamma(\mathbf{E}b, x).$$

Demonstraţie. Inegalitatea $\mathbf{E}\gamma(b, x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$ este evidentă deoarece minimul unei funcţii pe o mulţime dată este prin definiţie cea mai mică valoare a funcţiei pe acea mulţime. În particular, funcţia $\mathbf{E}\gamma(b,x)$ în punctul $x = x^*(\mathbf{E}b)$ ia o valoare mai mare decît $\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra a doua inegalitate să notăm cu x^* vectorul care realizează $\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$ şi cu $x^*(b)$ vectorul care realizează $\min_x \gamma(b,x)$ deci

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b, x) = \mathbf{E}\gamma(b, x^*) \tag{I.5.70}$$

$$\min_x \gamma(b, x) = \gamma(b, x^*(b)). \tag{I.5.71}$$

Este evident deci că funcţia $\gamma(b,x)$, oricare ar fi b, ia o valoare mai mare decît minimul ei (sau cel puţin egală) pentru $x = x^*$ încît se poate scrie că

$$\gamma(b, x^*) \geqslant \gamma(b, x^*(b))$$

sau

$$\gamma(b, x^*) \geqslant \min_x \gamma(b, x). \tag{I.5.72}$$

Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalităţii (I.5.72) se obţine

$$\mathbf{E}\gamma(b, x^*) \geqslant \mathbf{E} \min_x \gamma(b, x)$$

sau înlocuind $\mathbf{E}\gamma(b,x^*)$ prin definiţia ei dată de egalitatea (I.5.70) găsim

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \geqslant \mathbf{E} \min_x \gamma(b,x). \tag{I.5.73}$$

Inegalitatea (I.5.73) scrisă sub forma

$$\min_x \mathbf{E} \min_y (\varphi(x) + \psi(y)) \geqslant \mathbf{E} \min_x \min_y (\varphi(x) + \psi(y))$$

pune în evidenţă faptul că valoarea optimă a funcţiei obiectiv pentru soluţia Bayes este mai mare decît media valorilor optime ale funcţiei obiectiv obţinute în cadrul politicii de aşteptare.

Inegalitatea

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x) \geqslant \min_x \gamma(\mathbf{E}b, x) \tag{I.5.74}$$

se demonstrează pe baza inegalităţii lui Jensen de aceea implică condiţia ca funcţia $\gamma(b,x)$ să fie convexă şi continuă de b.

Reamintim că inegalitatea lui Jensen afirmă că

$$\mathbf{E}F(z) \geqslant F(\mathbf{E}z)$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $F(z)$ este o funcţie convexă şi continuă de z. Deoarece s-a stabilit că $\min_x \gamma(b,x)$ este o funcţie convexă şi continuă de b, urmează că inegalitatea (I.5.74) este adevărată.

Teorema IX. Dacă valorile pe care le poate lua vectorul aleator b satisfac condiţia

$$-\infty < b_{\min} \leqslant b \leqslant b_{\max} < +\infty$$

atunci,

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b, x) \leqslant \min_x \gamma\,(b_{\max}, x).$$

Demonstraţie. Reamintim că prin definiţie

$$\gamma(b,x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y) | g(x) + h(y) \geqslant b\} \qquad \text{(I.5.75)}$$

încît

$$\gamma(b_{\max}, x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y) | g(x) + h(y) \geqslant b_{\max}\}. \qquad \text{(I.5.76)}$$

Este evident că pentru un x admisibil orice y care satisface sistemul $g(x) + h(y) \geqslant b_{\max}$ satisface şi sistemul $g(x) + h(y) \geqslant b$. În particular, soluţia optimă $\tilde{y}$ a problemei (I.5.76) este o soluţie a sistemului de restricţii al problemei (I.5.75) dar

$$\gamma(b,x) \leqslant \gamma(b_{\max},x).$$

Luînd valorile medii în ambii membri şi ţinînd seama de faptul că $\gamma(b_{\max},x)$ este o constantă în raport cu b avem

$$\mathbf{E}\gamma(b,x) \leqslant \gamma(b_{\max},x) \qquad \text{(I.5.77)}$$

încît, dacă inegalitatea (I.5.77) este adevărată pentru orice x admisibil, atunci şi

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \leqslant \min_x (b_{\max},x).$$

Din această inegalitate rezultă că se poate calcula o margine superioară a valorii funcţiei obiectiv pentru soluţia Bayes rezolvînd o problemă de programare neliniară deterministică cu aceleaşi dimensiuni.

Teorema X. Dacă funcţia $\mathbf{E}\gamma(b,x)$ este diferenţiabilă în raport cu x şi dacă

(*i*) $g_i(x)$ şi $h_i(y)$ sînt funcţii concave iar

Scanned with OKEN Scanner

(*ii*) $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ sînt funcții convexe de argumentele lor, atunci

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \geqslant \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) + (x^* - x^*(\mathbf{E}b)) \bigtriangledown \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) \quad \text{(I.5.78)}$$

unde $x^*(\mathbf{E}b)$ este vectorul care realizează minimul funcției $\gamma(\mathbf{E}b,x)$, x^* este vectorul care realizează minimul funcției $\mathbf{E}\gamma(b,x)$, iar $\bigtriangledown \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b))$ este gradientul funcției $\mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b))$.

Demonstrație. Se știe că o funcție convexă și diferențiabilă $F(x)$ satisface inegalitatea

$$F(x_2) - F(x_1) \geqslant (x_2 - x_1) \bigtriangledown F(x_1) \quad \text{(I.5.79)}$$

pentru orice valori x_1, x_2 din domeniul de definiție.
$\mathbf{E}\gamma(b,x)$ este o funcție convexă de x (teorema VII) și diferențiabilă prin ipoteză încît pentru $x_1 = x^*(\mathbf{E}b)$, $x_2 = x^*$ avem

$$\mathbf{E}\gamma(b,x^*) - \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant (x^* - x^*(\mathbf{E}b)) \bigtriangledown \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)). \quad \text{(I.5.80)}$$

Deoarece, prin definiția vectorului x^*

$$\mathbf{E}\gamma(b,x^*) = \min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$$

inegalitatea (I.5.80) este identică cu (I.5.78).
Această teoremă ne oferă posibilitatea de a determina o nouă limită inferioară a valorii funcției obiectiv pentru problema în două stadii. Dacă $x^* = x^*(\mathbf{E}b)$ sau dacă $\bigtriangledown \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) = 0$ din (I.5.78) rezultă că

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \geqslant \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b))$$

dar, deoarece prin teorema VIII s-a stabilit că

$$\mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$$

rezultă că, în condițiile cerute,

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) = \mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)).$$

Exemplul VI. Să se verifice inegalitățile

$$\mathbf{E}\gamma(b,x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) \geqslant \mathbf{E} \min_x \gamma(b,x) \geqslant \min_x \gamma(\mathbf{E}b,x)$$

pentru

$$\gamma(b,x) = \min_y \{x^2 + 2y^2 \mid x + y \geqslant b,\ x \leqslant 100,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde b este o variabilă aleatoare uniform distribuită în intervalul [70, 80]. Vom calcula în primul rînd $x^*(\mathbf{E}b)$. Pentru exemplul ales $\mathbf{E}b = 75$ încît $x^*(\mathbf{E}b)$ este soluţia optimă a problemei

$$\min_x \gamma(\mathbf{E}b, x) = \min_x \min_y \{x^2 + 2y^2 \mid x + y \geqslant 75,\ x \leqslant 100,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Mulţimea soluţiilor sistemului de restricţii este domeniul MABCN (fig. 12) şi

$$\min_x \gamma(\mathbf{E}b, x) = \min \{x^2 + 2(75 - x)^2\}.$$

Minimul funcţiei $f = x^2 + 2(75 - x)^2$ este punctul în care

$$\frac{df}{dx} = 2x - 4(75 - x) = 0, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} \geqslant 0$$

încît $x^*(\mathbf{E}b) = 50$. Acum se poate calcula

$$\gamma(b, x^*(\mathbf{E}b)) = \min_y \{50^2 + 2y^2 \mid y \geqslant b - 50;\ y \geqslant 0\} = 50^2 + 2(b - 50)^2$$

$$\gamma(b, x^*(\mathbf{E}b)) = 2b^2 - 200b + 7500$$

$$\mathbf{E}\gamma(b, x^*(\mathbf{E}b)) = \frac{2}{10} \int_{70}^{80} (b^2 - 100b + 3750)\, db = 3767.$$

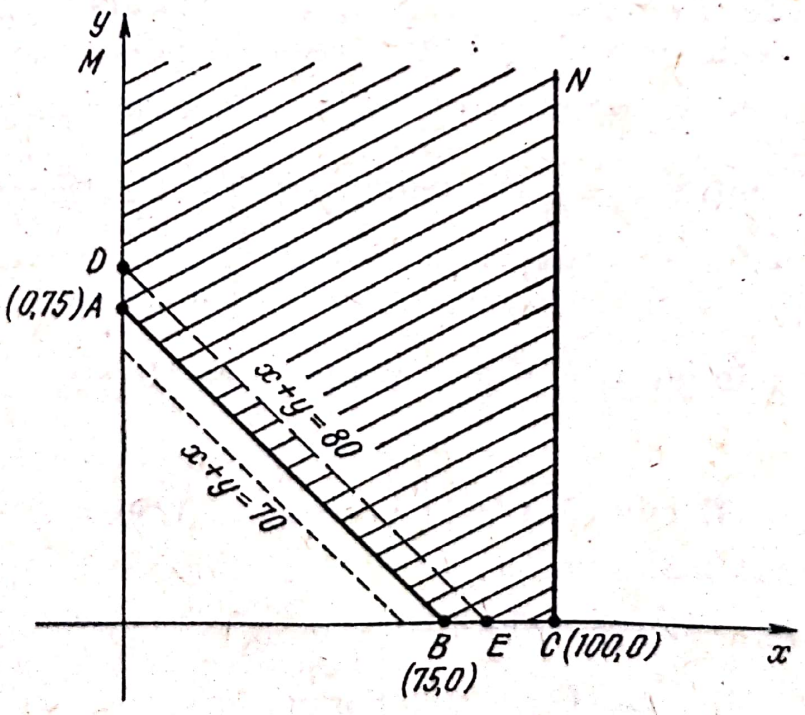

Fig. 12

Pentru a determina $\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x)$ folosim fig. 12 din care reiese că

$$\gamma(b,x) = \begin{cases} x^2 + 2(b-x)^2 & \text{dacă } x \leqslant b \\ x^2 & \text{dacă } x \geqslant b \end{cases}$$

încît avem

$$\mathbf{E}\gamma(b,x) = \begin{cases} 3x^2 - 300x + \frac{33\,800}{3} & \text{pentru } x < 70 \\ \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{3}x^3 + 170x^2 - 12\,800x + \frac{1\,024\,000}{3}\right) & \text{pentru } 70 \leqslant x < 80 \\ x^2 & \text{pentru } 80 \leqslant x \leqslant 100. \end{cases}$$

De aici se deduce cu uşurinţă că

$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) = 3767$ pentru $x = 50$ încît $x^* = x^*(\mathbf{E}b) = 50$ fapt care, aşa cum rezultă din teorema X, explică egalitatea

$$\min_x \mathbf{E}\gamma(b,x) = \mathbf{E}\gamma(\mathbf{E}b, x^*(\mathbf{E}b)).$$

Pentru verificarea celorlalte inegalităţi se calculează $\min_x \gamma(b,x)$. Dacă $x = 100$, $y = b - 100$ deci $\min_x \gamma(b,x) = 10\,000 + 2(b-100)^2$ şi condiţia $y \geqslant 0$ este îndeplinită numai pentru $b \geqslant 100$. Deoarece b ia valori numai în intervalul $[70, 80]$ această soluţie nu interesează.

Pentru $y = b - x$, $\gamma(b,x) = x^2 + 2(b-x)^2$, $\frac{d\gamma(b,x)}{dx} = 2x - 4(b-x)$ şi $\frac{d\gamma(b,x)}{dx} = 0$ pentru $x = \frac{2b}{3}$ iar $\min_x \gamma(b,x) = \frac{2}{3}b^2$. Deoarece $x \leqslant 100$ trebuie să avem şi $\frac{2b}{3} \leqslant 100$ deci $b \leqslant 150$ încît

$$\min_x \gamma(b,x) = \frac{2}{3}b^2 \quad \text{pentru } b \in [70,80]$$

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b,x) = \frac{1}{10}\int_{70}^{80} \frac{2}{3}b^2 db = 3756.$$

Din valorile determinate rezultă că

$$\min_x \mathbf{E}\,\gamma(b,x) > \mathbf{E} \min_x \gamma(b,x)$$

Scanned with OKEN Scanner

A rămas de calculat $\min_x \gamma(\mathbf{E}b,x)$ adică

$$\min_x \min_y \{x^2+2y^2 | x+y \geqslant 75,\ x \leqslant 100;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Această problemă a fost rezolvată pentru calculul soluției $x^*(\mathbf{E}b)$. S-a găsit $x = 50$ astfel că $y = 25$ și $\min_x \gamma(\mathbf{E}b,x) = 3750$ ceea ce înseamnă că se verifică și inegalitatea

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b,x) > \min_x \gamma(\mathbf{E}b,x).$$

Exemplul VII. Să se verifice inegalitatea

$$\min_x \mathbf{E}\,\gamma(b,x) \leqslant \min_x \gamma(b_{\max}, x)$$

stabilită în teorema IX, pentru problema din exemplul anterior. Variabila aleatoare b, în acest exemplu, ia valori în intervalul $[70, 80]$ încît $b_{\max} = 80$ și

$$\min_x \gamma(b_{\max}, x) = \min_x \min_y \{x^2+2y^2 | x+y \geqslant 80;$$

$$x \leqslant 100,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Problema se rezolvă determinînd minimul funcției $F(x) = x^2+2(80-x)^2$.

Din ecuația $\frac{dF}{dx} = 2x - 4(80-x) = 0$ se găsește $x = 53,(3)$ deci $y = 26,(6)$ și $\min_x \gamma(b_{\max},x) = 4267$. În exemplul VI s-a găsit $\min_x \mathbf{E}\,\gamma(b,x) = 3767$ încît inegalitatea propusă este verificată. Dealtfel această inegalitate se poate verifica prin simple considerații geometrice sugerate de fig. 12.

O margine superioară pentru media valorii optime a funcției economice. Să considerăm problema de programare stochastică cu funcția economică

$$\theta(x,\ y) = \varphi(x) + \psi(y) \qquad (I.5.81)$$

și sistemul de restricții de forma

$$g(x) + h(y) \geqslant b \qquad (I.5.82)$$

în care b este un vector aleator cu m componente b_i, $i = 1, \ldots, m$. Dacă toate componentele vectorului b sînt variabile aleatoare mutual independente și satisfac condițiile

$$-\infty < b_{i_1} \leqslant b_i \leqslant b_{i_2} < +\infty, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Scanned with OKEN Scanner

vom spune că vectorul aleator $b = (b_1, \ldots, b_m)$ este definit pe dreptunghiul m-dimensional I_m adică

$$-\infty < b^{(1)} \leqslant b \leqslant b^{(2)} < +\infty.$$

Se presupune că $\varphi(x)$ şi $\psi(y)$ sînt funcţii convexe continue iar $h_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$ sînt funcţii concave şi continue de argumentele lor şi că sistemul (I.5.82) admite soluţii pentru orice $b \in I_m$.

Un caz particular al problemei (I.5.81)—(I.5.82) este programul liniar stochastic cu funcţia economică

$$C(x, y) = cx + fy \tag{I.5.83}$$

şi restricţiile

$$\begin{gathered} Ax + Ty = b \\ x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0. \end{gathered} \tag{I.5.84}$$

Dacă se adoptă politica de aşteptare în rezolvarea programelor stochastice obiectivul urmărit este determinarea valorii medii a minimului sau maximului funcţiei economice încît distribuţia $H(b)$ a vectorului b trebuie să fie cunoscută ; chiar dacă se cunoaşte $H(b)$ problema propusă nu este uşoară astfel că este util să se determine un interval în care este cuprinsă valoarea medie a optimului funcţiei obiectiv. Inegalităţile lui A. Madansky pentru problemele liniare şi inegalităţile Mangasarian-Rosen pentru cele neliniare furnizează astfel de intervale.

În cele ce urmează se va expune o altă metodă de calcul pentru o limită superioară a acestei valori medii. Precizăm ideile presupunînd că funcţia economică a problemei de programare stochastică trebuie minimizată, încît notînd cu

$$\gamma(b, x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y) | g(x) + h(y) \geqslant b\} \tag{I.5.85}$$

$$G(b, x) = \min_y \{cx + f(y) | Ax + Ty = b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} \tag{I.5.86}$$

scopul urmărit este determinarea unor limite superioare pentru

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x) \qquad \text{şi} \qquad \mathbf{E} \min_x G(b, x).$$

Prin teoremele VI, VII § 4 şi teoremele V, VI din acest paragraf s-a stabilit că $\min_x G(b, x)$ şi $\min_x \gamma(b, x)$ sînt funcţii convexe şi continue de b încît, în esenţă, se urmăreşte determinarea limitei superioare a mediei unei funcţii convexe şi continue de un vector aleator

b definit pe dreptunghiul m-dimensional I_m. Problema astfel formulată este tratată de A. Madansky [30].

Pentru a simplifica expunerea să notăm cu $F(b)$ o funcţie convexă şi continuă de vectorul m-dimensional b definit pe dreptunghiul I_m. În particular $F(b) = \min_x \gamma(b, x)$ sau $F(b) = \min_x G(b, x)$.

Se notează cu S_{m+1} mulţimea de puncte $x \in R^{m+1}$

$$S_{m+1} = \{x | x_i = b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x_{m+1} = F(b)\ b \in I_m\}. \quad \text{(I.5.87)}$$

Prin definiţie, învelişul convex al unei mulţimi este cea mai mică mulţime convexă care conţine mulţimea dată. De exemplu, învelişul convex al mulţimii formate din două puncte este segmentul care uneşte aceste puncte.

Vom nota cu Q_{m+1} învelişul convex al mulţimii S_{m+1}. M. Dresler, S. Karlin şi L. S. Shapley [19] demonstrează că dacă $\mathcal{K}$ este mulţimea funcţiilor de repartiţie din R^m atunci învelişul convex al mulţimii

$$N_m = \{Z \mid Z_i = f_i(b),\quad i = 1, \ldots, m,\ b \in I_m\}$$

este mulţimea

$$M_m = \{\mu | \mu_i = \int_I f_i(b) dK(b),\ i = 1, \ldots, m,\ K \in \mathcal{K}\}$$

încît învelişul convex Q_{m+1} al mulţimii S_{m+1} este

$$Q_{m+1} = \{\mu | \mu_i = \int_{I_m} b_i dK(b),\ i = 1, \ldots, m;\ \mu_{m+1} = \int_{I_m} F(b) dK(b), K \in \mathcal{K}\}.$$

Se spune că un punct d^0 al mulţimii $\mathcal{D} \subset R^n$ este pe frontiera mulţimii $\mathcal{D}$ dacă şi numai dacă există un hiperplan suport al mulţimii $\mathcal{D}$ care trece prin d^0. Analitic, această condiţie se formulează astfel: punctul $d^0 \in \mathcal{D}$ este pe frontiera mulţimii $\mathcal{D} \subset R^n$ dacă există $n + 1$ numere reale $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i^0 + \lambda_0 = 0 \quad \text{(I.5.90)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i + \lambda_0 \geqslant 0 \qquad \text{pentru orice } d \in \mathcal{D}. \quad \text{(I.5.91)}$$

Se numeşte semispaţiu pozitiv determinat de un hiperplan (care nu este perpendicular pe hiperplanul $x_{m+1} = 0$) acel semispaţiu care conţine toate hipersuprafeţele convexe, tangente la hiperplan.

Scanned with OKEN Scanner

Punctul d_0 aparţine frontierei superioare a mulţimii $\mathcal{D}$ dacă şi numai dacă $\mathcal{D}$ se găseşte în semispaţiul negativ determinat în R^n de hiperplanul suport care trece prin d_0; dacă $\mathcal{D}$ se găseşte în semispaţiul pozitiv determinat în R^n de acest hiperplan, d_0 aparţine frontierei inferioare a mulţimii $\mathcal{D}$.

Pe baza acestei definiţii se poate verifica cu uşurinţă că frontiera inferioară a mulţimii Q_{m+1} este mulţimea S_{m+1}. În adevăr, $S_{m+1} \subset Q_{m+1}$ şi $F(b)$ fiind o funcţie continuă, suprafaţa $x_{m+1} = F(b)$ admite în fiecare punct un plan tangent care este un hiperplan suport pentru Q_{m+1}. Funcţia $F(b)$ fiind convexă, $Q_{(m+1)}$ se găseşte în semispaţiul pozitiv determinat în R_{m+1} de planul tangent la suprafaţa $x_{m+1} = F(b)$ într-un punct dat.

Pentru a defini frontiera superioară a mulţimii Q_{m+1} să considerăm mulţimea formată de cele 2^m vîrfuri ale dreptunghiului m-dimensional I_m. Coordonatele acestor puncte sînt

$$(b_{1\Phi_1}, b_{2\Phi_2}, \ldots, b_{m\Phi_m})$$

unde Φ_i, $i = 1, \ldots, m$ ia valorile 1 şi (sau) 2. De exemplu, dacă b este un vector bidimensional cu componentele b_1 şi b_2 astfel ca

$$-\infty < b_{1,1} \leqslant b_1 \leqslant b_{1,2} < +\infty; \qquad -\infty < b_{2,1} \leqslant b_2 \leqslant b_{2,2} < +\infty$$

dreptunghiul I_2 are $2^2 = 4$ vîrfuri

$$A_1(b_{1,1}\ b_{2,1});\quad A_2(b_{1,1}\ b_{2,2});\quad A_3(b_{1,2}\ b_{2,1}):\quad A_4\ (b_{1,2}\ b_{2,2}).$$

Fie Ω mulţimea formată din 2^m puncte cu coordonatele

$$(b_{1\Phi_1}, b_{2\Phi_2}, \ldots, b_{m\Phi_m}, F(b_{i\Phi_i})).$$

Se demonstrează cu uşurinţă

Teorema XI. Frontiera superioară a mulţimii Q_{m+1} este identică cu frontiera superioară a învelişului convex al mulţimii Ω. Această afirmaţie este evidentă geometric. În adevăr, să considerăm vectorul cu o singură dimensiune $b(b_1)$ definit pe dreptunghiul I_1 cu vîrfurile $A_1(b_{1,1})$, $A_2(b_{1,2})$, $b_{1,1} < b_{1,2}$ şi funcţia convexă $F(b)$.

Învelişul convex Q_2 al mulţimii S_2

$$S_2 = \{x | x_1 = b_1,\ x_2 = F(b_1)\ \ b_{1,1} \leqslant b_1 \leqslant b_{1,2}\} \qquad (I.5.92)$$

este mulţimea A′CB′ în fig. 13. Frontiera inferioară a acestei mulţimi este formată din punctele mulţimii S_2 iar frontiera superioară este segmentul care uneşte punctele $A'(b_{1,1}, F(b_{1,1}))$ şi $B'(b_{1,2}, F(b_{1,2}))$. Mulţimea Ω este formată din aceleaşi puncte şi învelişul convex a două puncte

Scanned with OKEN Scanner

este segmentul care le unește. Dacă b este un vector bidimensional definit pe dreptunghiul I_2 mulțimea Ω este formată din punctele

$$\begin{aligned} &A_1'(b_{1,1};\ b_{2,1};\ F(b_{1,1};\ b_{2,1}))\\ &A_2'(b_{1,1};\ b_{2,2};\ F(b_{1,1};\ b_{2,2}))\\ &A_3'(b_{1,2};\ b_{2,1};\ F(b_{1,2};\ b_{2,1}))\\ &A_4'(b_{1,2};\ b_{2,2};\ F(b_{1,2};\ b_{2,2})). \end{aligned} \tag{I.5.93}$$

Aceste puncte aparțin mulțimii

$$S_3 = \{x | x_1 = b_1,\ x_2 = b_2,\ x_3 = F(b_1, b_2),\ b_{1,1} \leqslant b_1 \leqslant b_{1,2};\ b_{2,1} \leqslant b_2 \leqslant b_{2,2}\}.$$

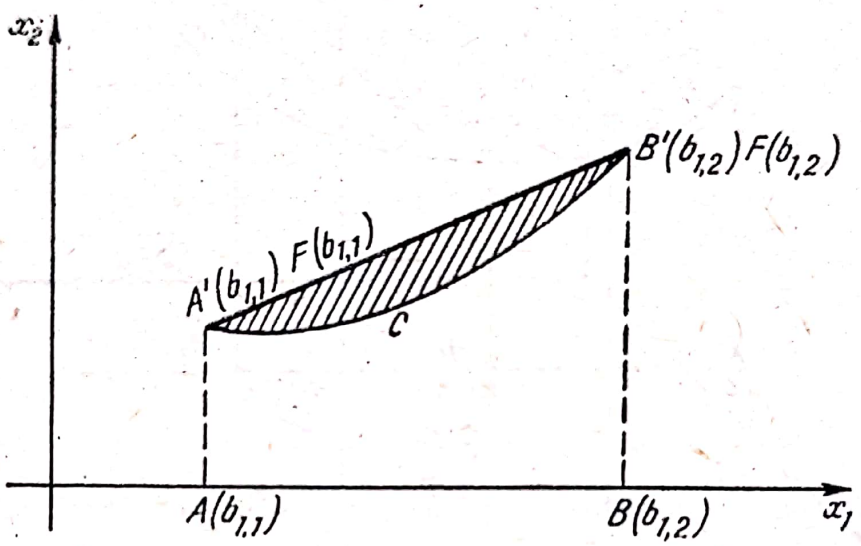

Fig. 13

Din fig. 14 se deduce că învelișul convex Q_3 a mulțimii S_3 are frontiera inferioară formată din punctele mulțimii S_3 iar frontiera superioară este formată de două din cele patru plane determinate de punctele A_1', A_2', A_3', A_4' și anume de acele plane pentru care cel de-al patrulea punct se află în semispațiul negativ definit de planul respectiv.

Teorema XII. Dacă $b(b_1, \ldots, b_m)$ este un vector aleator definit pe dreptunghiul m-dimensional I_m, și $F(b)$ este o funcție convexă și continuă de b atunci

$$F(\mathbf{E}b) \leqslant \mathbf{E}F(b) \leqslant Q^*(\mathbf{E}b) \tag{I.5.94}$$

unde $Q^*(\mathbf{E}b)$ este punctul în care raza vectoare

$$x_1 = \mathbf{E}b_1,\ x_2 = \mathbf{E}b_2,\ \ldots,\ x_m = \mathbf{E}b_m,\ x_{m+1} = 0,\ -\infty \leqslant 0 \leqslant +\infty$$

intersectează frontiera superioară a mulțimii Q_{m+1}.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Q_{m+1} fiind învelișul convex al mulțimii

$$S_{m+1}=\{x|x_i=b_i;\ i=1,\ \ldots,\ m;\ x_{m+1}=F(b)\quad b^{(1)}\leqslant b\leqslant b^{(2)}\}\qquad \text{(I.5.95)}$$

am văzut că este de forma

$$\left\{\mu|\mu_i=\int b_i\,dK(b),\ i=1,2,\ \ldots,\ m,\ \mu_{m+1}=\int F(b)dK(b),\ K\in\mathcal{K}\right\}$$

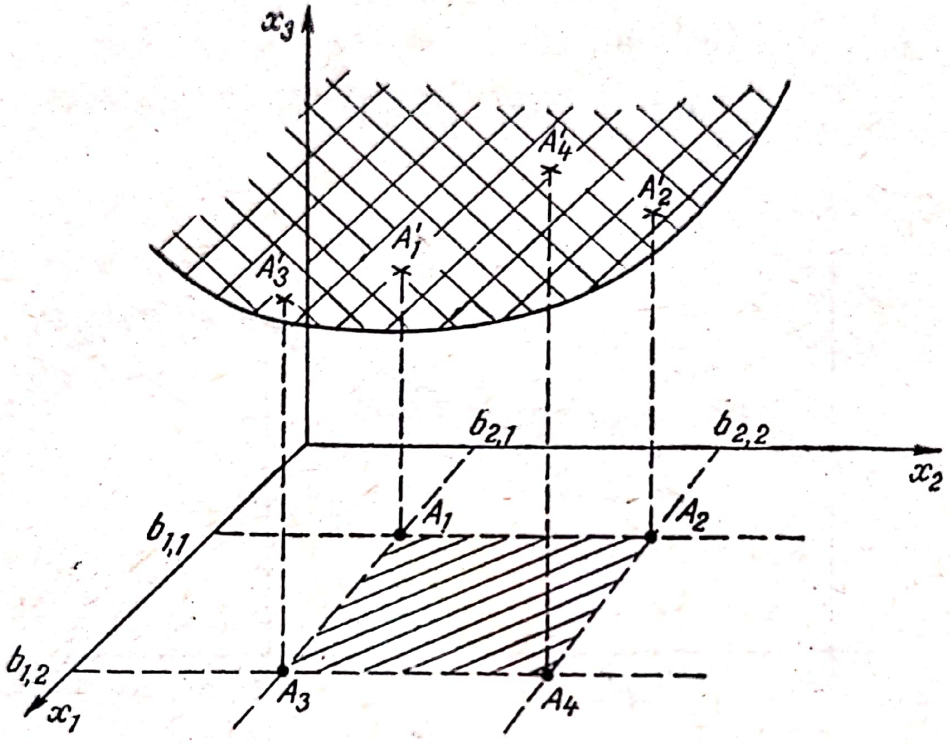

Fig. 14.

Deoarece $F(x)$ este frontiera inferioară a lui Q_{m+1}, iar $Q^*(x)$ este frontiera superioară, avem

$$F((\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m))\leqslant\mu_{m+1}\leqslant Q^*((\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m))\qquad \text{(I.5.96)}$$

Luînd în particular $K=H(b)$, repartiția lui b, obținem $\mu_{m+1}=\mathbf{E}F(b)$, $\mu_i=\mathbf{E}b_i$ și deci

$$F(\mathbf{E}b)\leqslant\mathbf{E}F(b)\leqslant Q^*(\mathbf{E}b).$$

De altfel, se observă că prima inegalitate din teorema XII este inegalitatea lui Jensen care, scrisă pentru $F(b)=\min\limits_x G(b,\ x)$ este

$$\min_x G(\mathbf{E}b,\ x)\leqslant\mathbf{E}\min_x G(b,\ x)$$

adică ultima dintre inegalitățile lui A. Madansky (teorema II din acest paragraf).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ia $F(b) = \min_x \gamma(b, x)$ atunci se obține

$$\min_x \gamma(\mathbf{E}b, x) \leqslant \mathbf{E} \min_x \gamma(b, x)$$

care este ultima dintre inegalitățile Mangasarian-Rosen (teorema VIII din acest paragraf).

Pentru valorificarea inegalității

$$\mathbf{E}F(b) \leqslant Q^*(\mathbf{E}b) \tag{I.5.97}$$

în cazurile $F(b) = \min_x G(b, x)$; $F(b) = \min_x \gamma(b, x)$ trebuie căutată o expresie analitică pentru frontiera superioară a mulțimii Q_{m+1} și intersecția ei cu raza vectoare $x_i = \mathbf{E}b_i$, $i = 1, \ldots, m$, $x_{m+1} = 0$. Vom începe prin a stabili aceste expresii pentru cazurile particulare în care vectorul b este unidimensional și bidimensional.

Dacă b este unidimensional am văzut că frontiera superioară a mulțimii Q_2 este segmentul care unește punctele $A'(b_{1,1}, F(b_{1,1}))$ și $B'(b_{1,2}, F(b_{1,2}))$.

Ecuația dreptei A'B' este

$$\frac{x_1 - b_{1,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}} = \frac{x_2 - F(b_{1,1})}{F(b_{1,2}) - F(b_{1,1})} \tag{I.5.98}$$

Punctul de intersecție al acestei drepte cu $x_1 = \mathbf{E}b$ are $x_2 = \theta$ unde

$$\theta = Q^*(\mathbf{E}b) = \frac{F(b_{1,2}) - F(b_{1,1})}{b_{1,2} - b_{1,1}} (\mathbf{E}b_1 - b_{1,1}) + F(b_{1,1}) \tag{I.5.99}$$

Astfel, inegalitatea (I.5.97), pentru $F(b) = \min_x G(b, x)$ este

$$\mathbf{E} \min_x G(b, x) \leqslant -\frac{b_{1,1} - \mathbf{E}b_1}{b_{1,2} - b_{1,1}} \min_x G(b_{1,2}, x) + \frac{b_{1,2} - \mathbf{E}b_1}{b_{1,2} - b_{1,1}} \min_x G(b_{1,1}, x) \tag{I.5.100}$$

Analog, pentru $F(b) = \min_x \gamma(b, x)$ se obține

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x) \leqslant -\frac{b_{1,1} - \mathbf{E}b_1}{b_{1,2} - b_{1,1}} \min_x \gamma(b_{1,2}, x) + \frac{b_{1,2} - \mathbf{E}b_1}{b_{1,2} - b_{1,1}} \min_x \gamma(b_{1,1}, x) \tag{I.5.101}$$

Din (I.5.100) rezultă că pentru a calcula această margine superioară trebuie rezolvate două probleme de programare liniară deterministică și anume:

$$\min_{x,y} \{cx + fy \mid Ax + Ty = b_{1,1}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}$$

$$\min_{x,y} \{cx + fy \mid Ax + Ty = b_{1,2}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}.$$

Înainte de a cerceta cazul în care vectorul b este bidimensional vom folosi relaţia (I.5.100) pentru determinarea marginii superioare a mediei $\min\limits_{x} G(b, x)$ pentru

Exemplul VIII $\min\limits_{x}\min\limits_{y}\{x_1 + 2y_1 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = b,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$, unde b este o variabilă uniform distribuită în intervalul $[70,\ 80]$.

Pentru aceasta se rezolvă problemele:

$$\min_x G(b_{1,1},\ x) = \min_{x,y}\{x_1 + 2y_1 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = 70,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0\}$$

$$\min_x G(b_{1,2},\ x) = \min_{x,y}\{x_1 + 2y_1 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = 80,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0\}$$

a căror soluţii evidente sînt respectiv $x_1 = 70,\ x_2 = 30,\ y_1 = 0$ şi $x_1 = 80,\ x_2 = 20,\ y_1 = 0$ încît $\min\limits_{x} G(b_{1,1},\ x) = 70$; $\min\limits_{x} G(b_{1,2},\ x) = 80$.

Aplicînd formula (I.5.100) găsim

$$\mathbf{E}\min_x G(b,\ x) \leqslant -\frac{70-75}{80-70}\cdot 70 + \frac{80-75}{80-70}80 = 75$$

Dacă se calculează $\mathbf{E}\min\limits_{x} G(b,x)$ se găseşte că această mărime are valoarea 75 încît, pentru acest exemplu, relaţia (I.5.100) este satisfăcută cu semnul „=".

Exemplul IX. Să se determine marginea superioară pentru:

$$\gamma(b,\ x) = \min_y\{x_1^2 + 2y_1^2 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = b,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ 70 \leqslant b \leqslant 80\},$$

b fiind uniform distribuită.

Vom rezolva în primul rînd problemele

$$\min_x \gamma(b_{1,1},\ x) = \min_y\{x_1^2 + 2y_1^2 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = 70,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0\}$$

$$\min_x \gamma(b_{1,2},\ x) = \min_y\{x_1^2 + 2y_1^2 | x_1 + x_2 = 100,\ x_1 + y_1 = 80,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0\}$$

Soluţiile acestor probleme sînt respectiv

$$x_1 = \frac{140}{3},\ x_2 = \frac{160}{3},\ y_1 = \frac{70}{3} \text{ şi } x_1 = \frac{160}{3},\ x_2 = \frac{140}{3},\ y_1 = \frac{80}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$\min_x \gamma(b_{1,1}, x) = \frac{2}{3}(70)^2 \text{ și } \min_x \gamma(b_{1,2}, x) = \frac{2}{3}(80)^2$$

$$\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x) \leqslant -\frac{70-75}{80-70} \cdot \frac{2}{3}(70)^2 + \frac{80-75}{80-70} \cdot \frac{2}{3}(80)^2 = 3767.$$

În exemplul VI din acest paragraf s-a găsit $\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x) = 3756$ valoare care este în adevăr mai mică decît 3767. Limita superioară pentru $\mathbf{E} \min_x \gamma(b, x)$ dată de inegalitățile Mangasarian-Rosen este mărimea $\min_x \mathbf{E}\gamma(b, x)$ care a fost calculată tot în exemplul VI și s-a găsit că este egală tot cu 3767. Deci, pentru acest exemplu, ambele metode conduc la același rezultat dar aplicarea formulei (I.5.100) pare a fi mai simplă decît calculul minimului mediei lui $\gamma(b, x)$.

Să revenim acum la tema expresiei analitice a frontierei superioare pentru mulțimea Q_{m+1} în cazul cînd b este un vector bidimensional cu componentele $b_{1,1} \leqslant b_1 \leqslant b_{1,2}$; $b_{2,1} \leqslant b_2 \leqslant b_{2,2}$. Considerînd punctele:

$$A_1'(b_{1,1}, b_{2,1}, F(b_{1,1}, b_{2,1}))$$
$$A_2'(b_{1,1}, b_{2,2}, F(b_{1,1}, b_{2,2}))$$
$$A_3'(b_{1,2}, b_{2,1}, F(b_{1,2}, b_{2,1}))$$
$$A_4'(b_{1,2}, b_{2,2}, F(b_{1,2}, b_{2,2}))$$

și expresia

$$D = F(b_{1,1}, b_{2,1}) + F(b_{1,2}, b_{2,2}) - F(b_{1,1}, b_{2,2}) - F(b_{1,2}, b_{2,1})$$

avem următoarele cazuri:

Cazul I. Dacă $D > 0$, frontiera superioară pentru Q_3 este planul determinat de punctele $A_1' A_3' A_4'$ pentru

$$x_2 \leqslant b_{2,1} + \frac{b_{2,2} - b_{2,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}}(x_1 - b_{1,1})$$

și planul determinat de punctele $A_1' A_2' A_4'$ pentru

$$x_2 \geqslant b_{2,1} + \frac{b_{2,2} - b_{2,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}}(x_1 - b_{1,1}).$$

Cazul II. Dacă $D < 0$, frontiera superioară pentru Q_3 este planul determinat de punctele $A_1' A_2' A_3'$ pentru

$$x_2 \leqslant b_{2,2} - \frac{b_{2,2} - b_{2,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}}(x_1 - b_{1,1})$$

și planul determinat de punctele $A_2' A_3' A_4'$ pentru

$$x_2 \geqslant b_{2,2} - \frac{b_{2,2} - b_{2,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}} (x_1 - b_{1,1}).$$

Cazul III. Dacă $D = 0$ punctele $A_1' A_2' A_3' A_4'$ sînt coplanare încît frontiera superioară este planul care trece prin aceste puncte. Fiind cunoscută frontiera superioară pentru Q_3 se poate găsi $Q^*(\mathbf{E}b)$. Deoarece calculele sînt laborioase nu vom stabili expresia limitei căutate pe această cale.

Descrierea explicită a frontierei superioare pentru Q_{m+1} în cazul cînd b are mai mult decît două componente nu s-a putut obține dar limita superioară pentru $\mathbf{E}F(b)$ se poate determina prin următoarele considerații:

Din discuțiile anterioare rezultă că pentru $b(b_1)$ avem

$$F(b_1) \leqslant \frac{b_1 - b_{1,1}}{b_{1,2} - b_{1,1}} F(b_{1,2}) + \frac{b_{1,2} - b_1}{b_{1,2} - b_{1,1}} F(b_{1,1}). \qquad \text{(I.5.102)}$$

Deoarece $F(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ este o funcție convexă de b_m dacă $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ iau valori determinate $b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{m-1}^*$ formula (I.5.102) ne îndreptățește să scriem inegalitatea

$$F(b_1^*, \ldots, b_{m-1}^*, b_m) \leqslant \frac{b_m - b_{m,1}}{b_{m,2} - b_{m,1}} F(b_1^*, \ldots, b_{m-1}^*, b_{m,2}) + \\ + \frac{b_{m,2} - b_m}{b_{m,2} - b_{m,1}} F(b_1^*, \ldots, b_{m-1}^*, b_{m,1}) \qquad \text{(I.5.103)}$$

Deoarece $F(b_1^*, \ldots, b_{j-1}^*, b_j^*, b_{j+1,\Phi_{j+1}}, \ldots, b_{m,\Phi_m})$ este o funcție convexă de b_j aplicînd succesiv inegalitatea (I.5.102) se obține

$$F(b_1, \ldots, b_m) \leqslant \sum_{\Phi} \prod_{i=1}^{m} (-1)^{\Phi_i} \frac{b_{i,\Phi_i} - b_i}{b_{i,2} - b_{i,1}} F(b_{1,\bar{\Phi}_1}, \ldots, b_{m,\bar{\Phi}_m}) \qquad \text{(I.5.104)}$$

unde $\bar{\Phi}_i = 3 - \Phi_i$. Deoarece, prin ipoteză, variabilele aleatoare b_i sînt mutual independente din (I.5.104) se deduce

$$\mathbf{E}F(b_1, \ldots, b_m) \leqslant \sum_{\Phi} (-1)^{\Phi_i} \prod_{i=1}^{m} \frac{b_{i\Phi_i} - \mathbf{E}b_i}{b_{i,2} - b_{i,1}} F(b_{1,\bar{\Phi}_1}, \ldots, b_{m,\bar{\Phi}_m}). \qquad \text{(I.5.105)}$$

Inegalitatea (I.5.105) justifică

Teorema XIII. Dacă toate componentele b_i, $i = 1, \ldots, m$ ale vectorului aleator b sînt variabile aleatoare mutual independente mărginite, definite pe un dreptunghi m-dimensional I_m, adică

$$-\infty < b_{i,1} \leqslant b_i \leqslant b_{i,2} < +\infty; \qquad i = 1, \ldots, m$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$\mathbf{E}\min_x G(b, x) \leqslant \sum_{\Phi} (-1)^{\Phi_i} \prod_{i=1}^{m} \frac{b_{i,\Phi_i} - \mathbf{E}b_i}{b_{i,2} - b_{i,1}} \min_x G(b_\Phi, x)$$

unde $b_\Phi = (b_{1\bar{\Phi}_1}, \ldots, b_{m\bar{\Phi}_m})$, Φ_i ia valorile 1 şi (sau) 2, $\bar{\Phi}_i = 3 - \Phi_i$ iar $G(b, x) = \min_y \{cx + fy | Ax + Ty \geqslant b,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ şi Φ este mulţimea a 2^m vectori m-dimensionali avînd componentele egale cu 1 şi/sau 2.

Pentru determinarea acestei limite trebuie rezolvate 2^m probleme de programare liniară deterministică şi anume $\min_x G(b_\Phi, x)$. Această sarcină nu este uşoară chiar în problemele de dimensiuni modeste. De exemplu, dacă modelul conţine 10 restricţii şi toate componentele vectorului b sînt variabile aleatoare, determinarea unei margini superioare pentru $\mathbf{E}\min_x G(b, x)$ necesită rezolvarea a 1024 probleme de programare liniară deterministică.

Inegalitatea (I.5.105) justifică şi

Teorema XIV. Dacă toate componentele b_i ale vectorului aleator b sînt variabile aleatoare mutual independente şi mărginite, definite pe dreptunghiul m-dimensional I_m adică

$$-\infty < b_{i,1} \leqslant b_i \leqslant b_{i,2} < +\infty; \quad i = 1, \ldots, m$$

atunci

$$\mathbf{E}\min\ \gamma(b, x) \leqslant \sum_{\Phi} (-1)^{\Phi i} \frac{b_{i,\Phi i} - \mathbf{E}b_i}{b_{i,2} - b_{i,1}} \min_x \gamma(b_\Phi, x)$$

unde b_Φ şi Φ_i au aceleaşi definiţii ca în teorema precedentă iar

$$\gamma(b, x) = \min_y \{\varphi(x) + \psi(y) | g(x) + h(y) \geqslant b\}.$$

§ 6. PROGRAME LINIARE CU RESTRICŢII ALEATOARE

Programul liniar

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min\ (\max) cx \end{gathered} \qquad \text{(I.6.1)}$$

este o problemă de programare liniară cu restricții aleatoare dacă

(*i*) vectorul b este aleator sau dacă

(*ii*) elementele matricei A sînt variabile aleatoare sau dacă

(*iii*) atît matricea A cît și vectorul b conțin elemente aleatoare.

Cazul asupra căruia s-au obținut mai multe rezultate este acel în care restricțiile sînt aleatoare fiindcă vectorul b este aleator. În acest paragraf ne vom ocupa în primul rînd de acest tip de probleme încît vom admite că, în modelul (I.6.1), A este o matrice cu elemente constante, de dimensiuni $m \times n$ și că rangul ei este m, c este un vector constant, b este un vector aleator.

În practică aceste probleme corespund cazurilor în care planificarea producției trebuie făcută atunci cînd fie disponibilul de materii prime, fie cererea de produse sînt aleatoare.

Se poate admite că distribuția vectorului b este cunoscută și atunci trebuie rezolvată o problemă de programare stochastică sau se poate admite că nu se cunoaște această distribuție și atunci problema se încadrează în clasa programărilor cu incertitudini.

Să presupunem că distribuția $\varphi(b)$ a vectorului b este dată și că pentru orice valoare b_i pe care o poate lua vectorul b, mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului de restricții este nevidă și mărginită. Soluțiile extreme ale sistemului $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ depind de b încît funcția economică este o variabilă aleatoare. S-au propus două metode de abordare a problemei în aceste condiții. Una dintre acestea, sugerată de R. Fortet [21] constă în determinarea distribuției induse de $\varphi(b)$ pe mulțimea soluțiilor extreme. Dezvoltările ultime ale acestei sugestii sînt cunoscute sub denumirea de „probleme de distribuții". Cealaltă cale de tratare a problemelor cu restricții aleatoare, dezvoltată de G. B. Dantzig, A. Madansky și S. Vajda [14], [29], [49] conduce la „programe în două stadii".

Dacă disponibilul de resurse este aleator, se poate presupune că planificatorul așteaptă să fie cunoscută o valoare particulară a vectorului b înainte de a alege activitățile și nivelul la care acestea se vor desfășura pentru realizarea optimului funcției economice. Repetînd experiența, de fiecare dată el are de rezolvat o problemă de programare liniară deterministică. În practică însă lucrurile nu se pot desfășura în acest fel. Dacă se poate determina distribuția indusă de $\varphi(b)$ pe mulțimea soluțiilor extreme, adică distribuția variabilei aleatoare

$$f(b) = \{\text{opt } cx(b) | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\},$$

planificatorul va fi informat asupra probabilității cu care o anumită soluție extremă este optimă sau asupra șansei de a obține o valoare dată a funcției economice.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se admite că planificatorul alege un program de activitate x, înainte de a cunoaşte valoarea vectorului b, este puţin probabil ca acest program să satisfacă sistemul $Ax \leqslant b$. După ce se cunoaşte vectorul b, planificatorul poate compensa nepotrivirile dintre hotărîrea iniţială şi situaţia prezentă alegînd un program de activitate y. În acest fel se ajunge la concepţia programelor în două stadii.

Probleme de distribuţie

Pentru determinarea distribuţiei induse de $\varphi(b)$ pe mulţimea soluţiilor extreme ale sistemului de restricţii $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ se poate proceda astfel:

Se consideră dualul modelului (I.6.1) în care vom presupune că obiectivul este minimizarea funcţiei economice. Avem

$$\begin{gathered} \lambda A \geqslant c \\ \lambda \geqslant 0 \\ \max \lambda b. \end{gathered} \tag{I.6.2}$$

Sistemul de restricţii din (I.6.2) este deterministic. Presupunem că mulţimea soluţiilor nenegative $\mathcal{D}$ a sistemului $\lambda A \geqslant c$ este nevidă şi mărginită.

Fie $x^*(b)$ şi $\lambda^*(b)$ soluţiile optime ale cuplului de probleme duale (I.6.1), (I.6.2) pentru o valoare determinată a vectorului b. În § 2 s-a arătat că distribuţia $\varphi(b)$ induce o distribuţie $\mathcal{L}_\lambda$ pe mulţimea vertexurilor domeniului.

Fie $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^q$ vectorii asociaţi vertexurilor domeniului $\mathcal{D}$. Rezultatele obţinute în § 2 ne îngăduie să scriem că

$$\mathbf{P}(\lambda^* = \lambda^r) = \mathbf{P}(b \in \Gamma_r(\lambda^r)) = \int_{\Gamma_r(\lambda^r)} d\varphi(b) \tag{I.6.3}$$

dacă $\Gamma_r(\lambda^r)$ este conul polyhedric convex din R^m generat de normalele la hiperplanele care determină vertexul corespunzător vectorului λ^r. Fiind cunoscute probabilităţile (I.6.3) se cunoaşte distribuţia $\mathcal{L}_\lambda$ indusă de distribuţia $\varphi(b)$ a vectorului b pe mulţimea $\{\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^q\}$ şi se poate calcula $\mathbf{E}\{\min cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$.

În adevăr, pentru orice cuplu de soluţii optime, $x^*(b)$, $\lambda^*(b)$ avem

$$cx^*(b) = \lambda^*(b) \cdot b$$

Scanned with OKEN Scanner

încît se poate afirma că

$$\mathbf{E}\{\min cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\} = \mathbf{E}\{\max \lambda b | \lambda A \geqslant c,\ \lambda \geqslant 0\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q} \int_{\Gamma_r(\lambda^r)} \lambda^r b d\varphi(b). \qquad \text{(I.6.4)}$$

Formula (I.6.4) dă posibilitatea de a calcula media valorii optime a funcției obiectiv cînd se cunosc soluțiile optime λ^r, $r = 1, \ldots, q$ ale problemei duale și conurile $\Gamma_r(\lambda^r)$. Reamintim că ecuațiile hiperplanelor care formează fețele acestor conuri sînt date de condițiile de optimalitate a bazei asociate soluției λ_r^* deci se obțin din iterațiile simplex.

Fiind cunoscute probabilitățile $\mathbf{P}(\lambda^* = \lambda^r)$ este cunoscută și distribuția $\mathcal{L}_\lambda$. Rămîne de arătat cum se poate obține $\mathcal{L}_x$ din $\mathcal{L}_\lambda$.

Se știe că fiecărui vertex al domeniului $\mathcal{D}$, deci fiecărui λ^r, $r = 1, \ldots, q$ îi corespunde o mulțime de soluții nenegative ale sistemului $Ax \geqslant b$. Această mulțime formează un con convex $\delta_r(\Gamma_r)$ în spațiul soluțiilor realizabile, cu vîrful în originea acestui spațiu. În adevăr, mulțimea $\delta_r(\Gamma_r)$ este un con deoarece Γ_r este un con și dacă un vector nenegativ x verifică sistemul $Ax \geqslant b$, atunci pentru orice $\varepsilon \geqslant 0$, $A\varepsilon x \geqslant \varepsilon b$. Conul $\delta_r(\Gamma_r)$ se compune din toate vîrfurile familiei de polyhedre $K(b)$ pentru care $b \in \Gamma_r$. De aici rezultă că

$$\mathbf{P}\{b \in \Gamma_r\} = \mathbf{P}\{x^* \in \delta_r(\Gamma_r)\}. \qquad \text{(I.6.5)}$$

Distribuția condiționată în interiorul conurilor $\delta_r(\Gamma_r)$ se poate obține cu ajutorul formulei care leagă soluțiile optime ale cuplului de probleme duale. Dacă λ^r este soluția optimă a problemei duale pentru $b = b_r$, soluția problemei primale este dată de formula

$$x^*(b) = B_r^{-1} b_r$$

unde $\widetilde{B}_r$ este submatricea de dimensiuni $(m \times m)$ din transpusa matricei A, corespunzătoare matricei unitate din tabelul simplex al soluției λ^r.

Determinarea conurilor Γ_r este, în fond, o problemă de programare liniară parametrică, parametrii apărînd în funcția economică, în timp ce determinarea conurilor $\delta_r(\Gamma_r)$ comportă rezolvarea unei probleme de programare parametrică, parametrizarea referindu-se la constantele sistemului de restricții.

Conurile Γ_r se determină în cursul aplicării algoritmului simplex în timp ce determinarea directă a conurilor $\delta_r(\Gamma_r)$ necesită stabilirea

Scanned with OKEN Scanner

tuturor bazelor care pot fi optimale deci o analiză a tuturor bazelor de dimensiuni $m \times m$ care se pot forma din matricea A de dimensiuni $m \times n$. Dacă n este un număr mare, sarcina determinării tuturor bazelor posibile și calculul diferențelor $z_j - c_j$ pentru fiecare dintre aceste baze, necesită un volum mare de calcule.

Exemplul I. Fie dată problema de programare liniară stochastică

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leqslant b_1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant b_2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \\ \max\,(3x_1 - x_2 + x_3) \end{gathered} \tag{I.6.6}$$

în care vectorul $b(b_1\ b_2)$ este aleator. Fiind cunoscute distribuția $\varphi(b)$ a vectorului b se cer distribuțiile $\mathcal{L}_\lambda$ și $\mathcal{L}_x$.
Pentru rezolvarea problemei propuse, se consideră dualul modelului (I.6.6). După transformarea inecuațiilor în ecuații, modelul dual este

$$\begin{gathered} \begin{array}{rrrrrr} 2\lambda_1 + & \lambda_2 - & z_1 & + \eta_1 & & = 3 \\ -3\lambda_1 - & \lambda_2 & & & + \eta_2 & = 1 \\ -5\lambda_1 + & 3\lambda_2 & - z_2 & & + \eta_3 & = 1 \end{array} \\ \min(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + M\eta_1 + M\eta_3). \end{gathered} \tag{I.6.7}$$

Coeficienții M care apar în funcția obiectiv sînt mărimi pozitive care pot lua valori oricît de mari. În acest fel se asigură eliminarea variabilelor artificiale η_1 și η_3 din bază.

Din tabelul iterațiilor simplex rezultă că nu există decît două baze optime, să zicem B_1 și B_2 formate din vectorii asociați variabilelor $(\lambda_1\eta_2\lambda_2)$ și (z_2, η_2, λ_2). În adevăr, problema nu are optim finit dacă $3b_1 + 5b_2 < 0$ deoarece vectorul asociat variabilei z_2 are toate componentele negative în baza B_1. De asemenea pentru $b_2 < 2$ nu se mai poate face o schimbare a bazei. Condițiile de optimalitate pentru baza B_1 formată din vectorii $(\lambda_1, \eta_2, \lambda_2)$ sînt: $-\frac{5}{3} b_2 \leqslant b_1 \leqslant 2b_2$ iar pentru baza B_2 formată din vectorii (z_2, η_2, λ_2) sînt: $0 \leqslant b_2 \leqslant \frac{b_1}{2}$. Notăm cu Γ_1 conul asociat bazei B_1, deci soluției λ^1 cu componentele $\lambda_1^1 = 8/11$; $\eta_2^1 = 52/11$; $\lambda_2^1 = 17/11$. De asemenea notăm cu Γ_2 conul asociat bazei B_2 și soluției λ^2 cu componentele $z_2^2 = 8$; $\eta_2^2 = 4$,

Scanned with OKEN Scanner

b_B ↓	$b_j \rightarrow$ Baza	c	b_1 λ_1	b_2 λ_2	0 z_1	0 z_2	M η_1	0 η_2	M η_3	Condiții de optimalitate
M	η_1	3	2	1	-1	0	1			
0	η_2	1	-3	-1	0	0		1		
M	$\leftarrow\eta_3$	1	-5	3*	0	-1			1	
			$-3M$ $-b_1$	$4M$ $-b_2$	$-M$	$-M$	0	0	0	
M	$\leftarrow\eta_1$	$^8/_3$	$^{11}/_3$*		-1	$^1/_3$	1		$-^1/_3$	
0	η_2	$^4/_3$	$-^{14}/_3$		0	$-^1/_3$		1	$^1/_3$	
b_2	λ_2	$^1/_3$	$-^5/_3$	1	0	$-^1/_3$			$^1/_3$	
			$^{11}/_3M$ $-^5/_3b_2-b_1$	0	$-M$	$^1/_3M$ $-^1/_3b_2$	0	0	$-^4/_3$ M $^1/_3$ b_2	
b_1	λ_1	$^8/_{11}$	1		$-^3/_{11}$	$^1/_{11}$*	$^3/_{11}$		$-^1/_{11}$	
0	η_2	$^{52}/_{11}$			$-^{14}/_{11}$	$^1/_{11}$	$^{14}/_{11}$	1	$-^1/_{11}$	
b_2	λ_2	$^{17}/_{11}$		1	$-^5/_{11}$	$-^2/_{11}$	$^5/_{11}$		$^2/_{11}$	$3b_1+5b_2\geq 0$ $b_1-2b_2\leq 0$
			0	0	$-\frac{3b_1+5b_2}{11}$	$\frac{b_1-2b_2}{11}$	$-M'$	0	$-M''$	
0	z_2	8	11		-3	1	3		-1	
0	η_2	4	-11		-1		1	1	0	
b_2	λ_2	3	2	1	-1		1		0	$b_1-2b_2\geq 0$ $b_2\geq 0$
			$2b_2-b_1$	0	$-b_2$	0	$-\overline{M}'$	0	$-\overline{M}''$	

$\lambda_2^2 = 3$. Fiind dată distribuția $H(b)$, distribuția $\mathcal{L}_\lambda$ se obține calculînd

$$\mathbf{P}(\lambda^* = \lambda^1) = \mathbf{P}(b \in \Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} dH(b)$$

$$\mathbf{P}(\lambda^* = \lambda^2) = \mathbf{P}(b \in \Gamma_2) = \int_{\Gamma_2} dH(b).$$

Să admitem, de exemplu, că b_1 și b_2 sînt variabile aleatoare independente, continue și cu distribuție uniformă în intervalele (5,9)

respectiv (2,10). Fie Γ_1 conul definit de $3b_1 + 5b_2 \geqslant 0$, $b_1 - 2b_2 \leqslant 0$ și Γ_2 conul definit de $b_1 - 2b_2 \geqslant 0$; $b_2 \geqslant 0$. Ținînd seama de distribuția variabilelor aleatoare b_1 și b_2 avem

$$\mathbf{P}(b \in \Gamma_1) = \int_5^9 \int_{b_1/2}^{10} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\, db_1 db_2 = \frac{13}{16}$$

$$\mathbf{P}(b \in \Gamma_2) = \int_5^9 \int_2^{b_1/2} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\, db_1 db_2 = \frac{3}{16}.$$

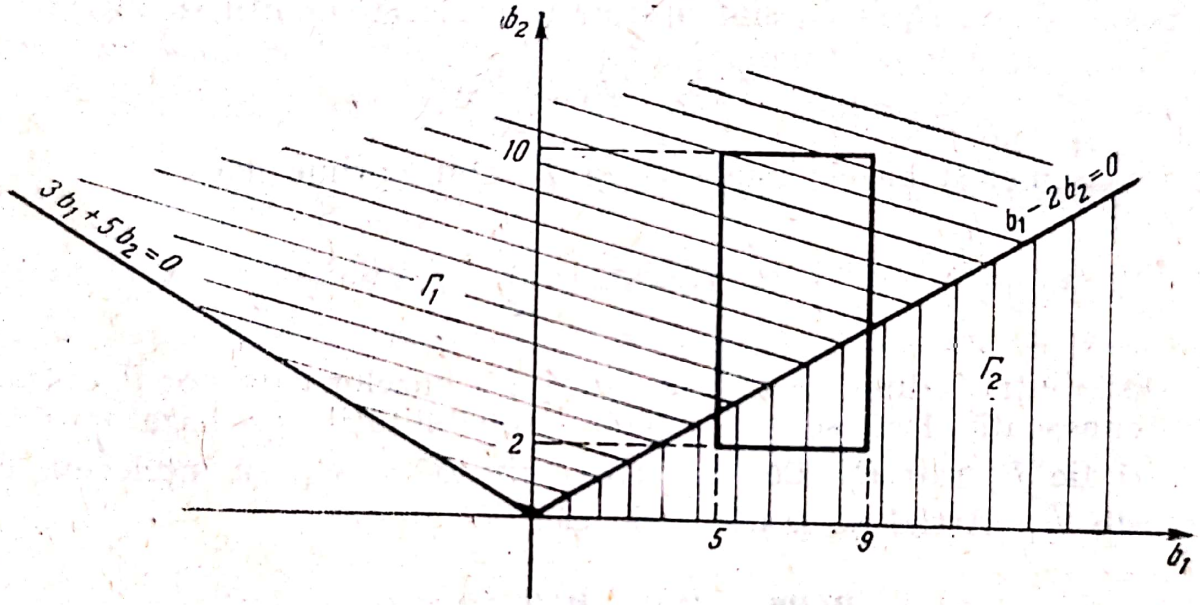

Fig. 15

Din rezultatele obținute pentru problema duală se poate deduce că problema primală are, de asemenea, numai două baze care pot fi optime și anume $\widetilde{B}_1$ corespunzătoare bazei B_1 a dualei și $\widetilde{B}_2$ corespunzătoare bazei B_2 a dualei. Corespondența dintre variabilele cuplului de probleme duale arată că baza $\widetilde{B}_1$ este formată de vectorii x_1 și x_3 iar $\widetilde{B}_2$ de vectorii ζ_1 și x_1 dacă se notează cu ζ_1 variabila de abateri asociată primei inecuații din sistemul (I.6.6). Inversele acestor baze sînt

$$\widetilde{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & 5/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Componentele vectorului b în fiecare din aceste baze sînt:

$$\widetilde{B}_1^{-1} b = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{11} & {}^{5}/_{11} \\ -{}^{1}/_{11} & {}^{2}/_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{11}(3b_1 + 5b_2) \\ {}^{1}/_{11}(-b_1 + 2b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{B}_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - 2b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Baza $\widetilde{B}_1$ este optimă dacă $3b_1 + 5b_2 \geqslant 0$ şi $-b_1 + 2b_2 \geqslant 0$ deoarece toate diferenţele $z_j - c_j$ în această bază sînt nenegative fiind egale cu elementele vectorului λ^1. Baza $\widetilde{B}_2$ este optimă dacă $b_1 - 2b_2 \geqslant 0$ şi $b_2 \geqslant 0$ deoarece diferenţele $z_j - c_j$ în această bază sînt de asemenea nenegative şi egale cu elementele vectorului λ^2. Se observă că bazele duale B_1 şi $\widetilde{B}_1$ sînt optime în aceleaşi condiţii şi anume

$$-{}^{5}/_{3}\, b_2 \leqslant b_1 \leqslant 2b_2.$$

De asemenea bazele duale B_2 şi $\widetilde{B}_2$ sînt optime dacă

$$0 \leqslant b_2 \leqslant \frac{b_1}{2}$$

Distribuţia indusă de $\varphi(b)$ pe mulţimea bazelor care pot fi optime este cunoscută dacă se pot calcula probabilităţile ca baza optimă, B^*, să fie $\widetilde{B}_1$ sau $\widetilde{B}_2$. Convenim ca prin $B^* = \widetilde{B}_1$, să înţelegem că B^* este $\widetilde{B}_1$. Astfel se poate scrie că

$$\mathbf{P}(B^* = \widetilde{B}_1) = \mathbf{P}(\widetilde{B}_1^{-1} b \geqslant 0)$$

Evenimentul A care constă în realizarea condiţiei $\widetilde{B}_1^{-1} b \geqslant 0$ se compune din evenimentele A_i, $i = 1, \ldots, m$ care constau în realizarea condiţiilor $\beta_i\, b \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ unde s-a notat cu β_i linia i din matricea $\widetilde{B}_1^{-1}$. Cu aceste notaţii se poate scrie că

$$\mathbf{P}(\widetilde{B}_1^{-1} b \geqslant 0) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\Big) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \ldots \mathbf{P}_{\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i}(A_m)$$

Pentru exemplul studiat avem

$$\mathbf{P}(\widetilde{B}_1^{-1} b \geqslant 0) = \mathbf{P}(3b_1 + 5b_2 \geqslant 0) \cdot \mathbf{P}_{3b_1+5b_2 \geqslant 0}(-b_1 + 2b_2 \geqslant 0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $b_1 \in [5,9]$ şi $b_2 \in [2,10]$ evenimentul $3b_1 + 5b_2 \geqslant 0$ este sigur încît $\mathbf{P}(3b_1 + 5b_2 \geqslant 0) = 1$ şi

$$\mathbf{P}(-b_1 + 2b_2 \geqslant 0) = \mathbf{P}(b_1 \leqslant 2b_2) = \frac{1}{32}\int_5^9 db_1 \int_{b_1/2}^{10} db_2 = \frac{13}{16}$$

Pentru baza $\widetilde{B}_2$ avem

$$\mathbf{P}(B^* = \widetilde{B}_2) = \mathbf{P}(b_2 \geqslant 0;\ b_1 - 2b_2 \geqslant 0) = \mathbf{P}(b_2 \geqslant 0) \cdot \mathbf{P}(b_1 - 2b_2 \geqslant 0) = \frac{3}{16}.$$

Rezultatele obţinute pot fi interpretate din punct de vedere practic dacă presupunem că modelul (I.6.6) urmăreşte alegerea unui program de producţie care trebuie să satisfacă o cerere aleatoare şi să maximizeze beneficiul realizabil. Cunoscînd distribuţia indusă pe mulţimea soluţiilor extreme planificatorul va alege programul $x_1 = \frac{1}{11}(3b_1 + 5b_2)$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{11}(-b_1 + 2b_2)$ asociat bazei $\widetilde{B}_1$ fiindcă acest program are probabilitatea $\frac{13}{16} \approx 81{,}25\%$ de a fi optim. Beneficiul mediu care se poate realiza dacă se adoptă acest plan de producţie este

$$\mathbf{E}\{\max_{\Gamma_1}(3x_1 - x_2 + x_3)\} = \frac{1}{11 \cdot 8 \cdot 4}\int_{\Gamma_1}(8b_1 + 17b_2)db_1db_2 =$$

$$= \frac{1}{11 \cdot 4 \cdot 8}\int_5^9 \int_{b_1/2}^{10}(8b_1 + 17b_2)db_1db_2 = 9{,}62.$$

Valoarea medie a beneficiului maxim pe mulţimea soluţiilor realizabile este

$$\mathbf{E}\{\max_{\mathcal{D}}(3x_1 - x_2 + x_3)\} = \frac{1}{11 \cdot 4 \cdot 8}\int_{\Gamma_1}(8b_1 + 17b_2)db_1db_2 +$$

$$+ \frac{3}{4 \cdot 8}\int_{\Gamma_2} b_2 db_1db_2 = 11{,}22.$$

Aceste informaţii nu dau totuşi posibilitatea de a hotărî *cît* trebuie să se producă. Se ştie că se vor produce sortimentele corespunzătoare variabilelor x_1 şi x_3 dar nivelul producţiei care asigură beneficiul maxim

Scanned with OKEN Scanner

este exprimat în funcţie de mărimile aleatoare b_1 şi b_2. Soluţia problemei deterministice obţinute din (I.6.6) atribuind variabilelor aleatoare b_1 şi b_2 valorile lor medii, $\mathbf{E}b_1 = 7$; $\mathbf{E}b_2 = 6$ este $x_1 = \frac{51}{11}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{5}{11}$ şi beneficiul corespunzător este de 14,36 unităţi.

În problemele de distribuţie s-au obţinut rezultate făcînd precizări asupra distribuţiei vectorului b. În acest sens, B. Bereanu [2] a stabilit expresia analitică a funcţiei de distribuţie $F(z)$ pentru

$$f(\omega) = \{\min_x cx \mid Ax = b + t(\omega)d,\ x \geqslant 0\}$$

unde b şi d sînt vectori constanţi, $t(\omega)$ este o variabilă aleatoare cu valori în intervalul finit $[\delta_1,\ \delta_2]$ şi a cărei funcţie de distribuţie $T(\tau)$ este continuă şi strict crescătoare pe $[\delta_1,\ \delta_2]$. Se admite, ca deobicei, că $\mathcal{D}$, mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului de restricţii este nevidă şi mărginită pentru toate valorile variabilei $t(\omega)$.

Pentru determinarea funcţiei $F(z)$ se rezolvă problema de programare liniară parametrică

$$Ax = b + \lambda d$$

$$x \geqslant 0$$

$$\min cx.$$

Astfel se obţin valorile caracteristice ale parametrului λ, pe care le notăm cu

$$\delta_1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{p-1} < \lambda_p = \delta_2 \tag{I.6.8}$$

şi soluţiile optime corespunzătoare fiecărui interval

$$x^s = u^s + \lambda v^s;\ s = 1, \ldots, p. \tag{I.6.9}$$

Dacă se notează

$$w_s(z) = \frac{z - cu^s}{cv^s} \tag{I.6.10}$$

se poate enunţa

Teorema I. Funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare

$$f(\omega) = \{\min_x cx \mid Ax = b + t(\omega)d,\ x \geqslant 0\} \tag{I.6.11}$$

este

$$F(z) = \sum_{s=1}^{p} H_s(z) \tag{I.6.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$H_s(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \begin{cases} cv^s > 0 \text{ și } w_s(z) \leqslant \lambda_{s-1} \\ cv^s < 0 \text{ și } w_s(z) \geqslant \lambda_s \\ cv^s = 0 \text{ și } cu^s \geqslant z \end{cases} \\ T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1}) & \text{dacă } \begin{cases} cv^s > 0 \text{ și } w_s(z) \geqslant \lambda_s \\ cv^s < 0 \text{ și } w_s(z) \leqslant \lambda_{s-1} \\ cv^s = 0 \text{ și } cu^s < z \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} T(w_s(z)) - T(\lambda_{s-1}) \\ T(\lambda_s) - T(w_s(t)) \end{matrix}\right\} & \text{dacă } \lambda_{s-1} < w_s(z) < \lambda_s \text{ și } \begin{cases} cv^s > 0 \\ cv^s < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.6.13)$$

$1 \leqslant s \leqslant p$

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe aceleași considerente ca și în demonstrația teoremei IV din §2. Evenimentul A fiind $[\omega | f(\omega) < z]$ și evenimentul E_s fiind $[\omega | \lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s]$ se realizează odată cu oricare din evenimentele E_s încît

$$\mathbf{P}(A) = \sum_s \mathbf{P}(E_s)\mathbf{P}(A|E_s) = \sum_s \mathbf{P}(A \cap E_s)$$

Notînd $\mathbf{P}(A \cap E_s) = H_s(z)$ avem

$$H_s(z) = \mathbf{P}[cu^s + t(\omega)cv^s < z \cap \lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s]. \quad (1.6.14)$$

Astfel, $H_s(z)$ este determinat de soluțiile sistemului de inegalități

$$\begin{gathered} cu^s + t(\omega)cv^s < z \\ \lambda_{s-1} \leqslant t(\omega) \leqslant \lambda_s. \end{gathered} \quad (1.6.15)$$

Analizînd toate situațiile care se pot prezenta se obține $H_s(z)$ dat de (1.6.13).

Exemplul II. Să se determine funcția de distribuție pentru

$$f(\omega) = \max 3x_1 - x_2 + x_3 \quad (1.6.16)$$

definită pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leqslant 26 - 2\omega \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 8 + \omega \end{gathered} \quad (1.6.17)$$

în care ω este o variabilă aleatoare continuă, cu valori în intervalul $[-5; 10]$ și avînd densitatea de probabilitate

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{75}(0{,}02\omega^2 - 0{,}2\omega + 5).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţiile modelului (I.6.16) — (I.6.17) în care ω este privit ca un parametru sînt

$$x_1 = \frac{50+\omega}{5};\quad x_2 = \frac{10-4\omega}{5};\quad x_3 = 0 \quad \text{pentru} \quad -5 \leqslant \omega \leqslant 2{,}5$$

$$x_1 = \frac{118-\omega}{11};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \frac{4\omega-10}{11} \quad \text{pentru} \quad 2{,}5 \leqslant \omega \leqslant 10.$$

Valorile funcţiei $f(\omega)$ sînt

$$f_1(\omega) = \frac{7}{5}(20+\omega) \quad \text{pentru} \quad -5 \leqslant \omega \leqslant 2{,}5.$$

$$f_2(\omega) = \frac{1}{11}(344+\omega) \quad \text{pentru} \quad 2{,}5 \leqslant \omega \leqslant 10.$$

Deoarece $cv^1 = \frac{7}{5} > 0 \quad w_1(z) = \frac{z-cu^1}{cv^1} = \frac{z-28}{1{,}4}$ şi

$$\frac{z-28}{1{,}4} \leqslant -5 \quad \text{pentru } z \leqslant 21$$

$$\frac{z-28}{1{,}4} \geqslant 2{,}5 \quad \text{pentru } z \geqslant 31{,}5$$

Aplicînd formulele (I.6.13) găsim

$$H_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad z \leqslant 21 \\ T\left(\frac{z-28}{1{,}4}\right) - T(-5) & \text{pentru} \quad 21 \leqslant z \leqslant 31{,}5 \\ T(2{,}5) - T(-5) & \text{pentru} \quad z \geqslant 31{,}5 \end{cases}$$

De asemenea

$$cv^2 = \frac{1}{11} > 0,\ w_2(z) = \frac{z-cu^2}{cv^2} = \frac{z-\frac{344}{11}}{\frac{1}{11}} = 11z - 344$$

şi

$$11z - 344 \leqslant 2{,}5 \quad \text{pentru } z \leqslant 31{,}5$$
$$11z - 344 \geqslant 10 \quad \text{pentru } z \geqslant 32{,}18$$

deci avem

$$H_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z \leqslant 31{,}5 \\ T(11z-344) - T(2{,}5) & \text{pentru } 31{,}5 \leqslant z \leqslant 32{,}18 \\ T(10) - T(2{,}5) & \text{pentru } z \geqslant 32{,}18 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$T(\alpha) = \int_{-5}^{\alpha} \tau(\omega)\, d\omega.$$

Calculînd

$$T(-5) = 0\,;\quad T(10) = 1\,;\quad T(2{,}5) = \int_{-5}^{2{,}5} \frac{1}{75}(0{,}02\omega^2 - 0{,}2\omega + 5)d\omega \simeq 0{,}48$$

avem

$$H_1(z) = \begin{cases} 0 & ;\ z \leqslant 21 \\ T\left(\dfrac{z-28}{1{,}4}\right) & ;\ 21 \leqslant z \leqslant 31{,}50\,; \\ 0{,}5375 & ;\ z \geqslant 31{,}50 \end{cases}$$

$$H_2(z) = \begin{cases} 0 & ;\ z \leqslant 31{,}5 \\ T(11z - 344) - 0{,}48\,; & 31{,}5 \leqslant z \leqslant 32{,}1 \\ 0{,}4625 & ;\ z \geqslant 32{,}1. \end{cases}$$

Ne propunem să găsim valorile pentru $F(35)$; $F(20)$ şi $F(28)$. Se găseşte

$$F(35) = \mathbf{P}(f(\omega) < 35) = 0{,}5375 + 0{,}4625 = 1.$$

Presupunînd că funcţia economică reprezintă beneficiul realizat, rezultatul $F(35) = 1$ înseamnă că în mod sigur, beneficiul este mai mic de 35 oricare ar fi, să zicem, disponibilul de materii prime în cadrul condiţiilor problemei. Calculînd $F(20)$ avem

$$F(20) = \mathbf{P}(f(\omega) < 20) = 0 + 0 = 0.$$

ceea ce ne îndreptăţeşte să afirmăm că, aproape sigur, beneficiul va fi mai mare decît 20 unităţi. Pentru $F(28)$ avem

$$F(28) = \mathbf{P}(f(\omega) < 28) = T(0) \simeq 0{,}3(7)$$

încît, cu o probabilitate de 63%, poate fi asigurat un beneficiu mai mare de 28 unităţi.

Generalizînd expresia $b + t(\omega)d$ a vectorului b, B. Bereanu [3] formulează problema de programare liniară cu resctricţii aleatoare

$$\begin{gathered} Ax = b(t) \\ x \geqslant 0 \\ \min cx \end{gathered} \qquad \text{(I.6.18)}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $b(t) = b^0 + \sum_{k=1}^{r} b^k t_k$ unde b^k, $k = 0,1,\ldots, r$ sînt vectori constanți iar $t = (t_1, \ldots, t_r)$ este un vector aleator cu valori în spațiul r-dimensional. Se admite că:

(*i*) variabila aleatoare t este absolut continuă și mărginită. Fie $\mathcal{T}$ mulțimea valorilor lui t și $T(\tau)$ densitatea mixtă de probabilitate a lui t pe $\mathcal{T}$;

(*ii*) există cel puțin un vector $t^* \in \mathcal{T}$ pentru care, $\mathcal{D}_{t^*}$, mulțimea soluțiilor realizabile ale sistemului de restricții este nevidă și mărginită;

(*iii*) soluțiile realizabile de bază ale dualei modelului (I.6.18) sînt nedegenerate.

În aceste condiții se dovedește:

Teorema II. Fie Γ_l $(l = 1, \ldots, q)$ regiunile de decizie ale problemei (I.6.18), $\Gamma_0 = \mathcal{T} - \bigcup_{l=1}^{q} \Gamma_l$; $K^l(t)$ mulțimea soluțiilor realizabile de bază ale sistemului de restricții, B_l bazele asociate acestor soluții și $p_l = \mathbf{P}(\Gamma_l)$, probabilitățile fundamentale. În condițiile (*i*), (*ii*) și (*iii*) avem:

a) $\Gamma_l = \{t | B^{-1} b(t) \geqslant 0,\ t \in \mathcal{T}\}$ $l = 1, \ldots, q$

b) $\mathbf{P}(\Gamma_i \cap \Gamma_j) = 0$ dacă $i \neq j$

c) dacă $\mathbf{P}(\Gamma_0) = 0$ atunci $\sum_{l=1}^{q} p_l = 1$

d) dacă $\mathbf{P}(\Gamma_0) = p_0 > 0$ atunci $\sum_{l=1}^{q} p_l = 1 - p_0$

și programele liniare corespunzătoare nu au soluții.

Funcția de distribuție $F_\gamma(z)$ a variabilei aleatoare $\gamma(t) = \{\min cx | x \in \mathcal{D}_t,\ x \geqslant 0\}$ media ei $\mathbf{E}(\gamma)$ și dispersia sînt date de formulele

$$F_\gamma(z) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\Gamma_{l_z}} dT(t) \tag{I.6.19}$$

unde

$$\Gamma_{l_z} = \Gamma_l \cap \{\gamma \leqslant z\}$$

$$\mathbf{E}(\gamma) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\Gamma_l} \gamma_l(t) dT(t) \tag{I.6.20}$$

$$\mathbf{D}(\gamma) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\Gamma_l} \gamma_l^2(t) dT(t) - [\mathbf{E}(\gamma)]^2 \tag{I.6.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. În baza ipotezei (*ii*), pentru orice t finit, $\mathcal{D}_t$ este mărginit dacă este nevid. Fie t_1 o valoare determinată a lui t astfel ca $\mathcal{D}_{t_1} \neq \emptyset$ și B_1 baza optimă a problemei deterministice obținute din (I.6.18) pentru $t = t_1$. Baza B_1 corespunde unei soluții dual realizabile pentru orice $t \in \mathcal{T}$ încît vectorul

$$x'(t) = B_1^{-1}\ b(t)$$

este o soluție optimă pentru toți $t \in \mathcal{T}$ pentru care $x'(t)$ este nenegativ. Fie

$$\Gamma_1 = \{t | B_1^{-1} b(t) \geqslant 0\ ;\ t \in \mathcal{T}\}.$$

Dacă pentru orice $t \in \mathcal{T} - \Gamma_1$, $\mathcal{D}_t = \emptyset$ atunci $\Gamma_0 = \mathcal{T} - \Gamma_1$. În caz contrar fie $t_2 \in \mathcal{T} - \Gamma_2$ o valoare a vectorului t pentru care $\mathcal{D}_{t_2} \neq \emptyset$ și B_2 baza optimă a problemei deterministice obținute din (I.6.18) pentru $t = t_2$. Fiind cunoscut B_2 se va determina Γ_2. Procedeul se repetă și, deoarece numărul bazelor este finit, după un număr finit de etape se determină mulțimea Γ_0 de vectori t pentru care problema nu admite soluții. Definiția mulțimii Γ_l justifică punctele (a), (b), (c) și (d) ale teoremei. Pentru a stabili formula (I.6.19) se observă că evenimentul $\gamma(t) \leqslant z$ se realizează odată cu oricare dintre evenimentele $t \in \Gamma_l$, $l = 1, \ldots, q$. Ținînd seamă de (b) și (c) avem

$$\mathbf{P}(\gamma(t) < z) = \sum_{l=1}^{q} \mathbf{P}[(\gamma(t) < z) \cap (t \in \Gamma_l)]$$

care justifică (I.6.19).

Pentru a stabili valabilitatea formulelor (I.6.20) și (I.6.21) trebuie dovedită convergența integralelor $\int_{\Gamma_l} \gamma_l(t) d(T)$ și $\int_{\Gamma_l} \gamma^2(t) d(T)$. Aceste integrale se obțin din $\int_{\mathcal{S}} \gamma_l(t) d(T)$ și $\int_{\mathcal{S}} \gamma_l^2(t) d(T)$ printr-o diviziune a domeniului de integrare încît este suficient să se arate că aceste ultime integrale există. Existența integralelor $\int_{\mathcal{S}} \gamma_l(t)\, d(T)$ pentru toți $l = 1, \ldots, q$ este justificată de faptul că variabilele t_k, $k = 1, \ldots, r$ au momente finite de ordinul întîi și doi.

Pentru a arăta că și $\int_{\mathcal{S}} \gamma_l^2(t) d(T)$ există, scriem

$$\gamma_l(t) = c\ B_l^{-1} b(t) = c\ B_l^{-1}(b^0 + b^1 t_1 + \ldots + b^r t_r) = c\ B_l^{-1}\ b^0 + c\ B_l^{-1} b^1 t_1 + \ldots + c\ B_l^{-1} b^r t_r = \beta_{0l} + \beta_{1l} t_1 + \ldots + \beta_{rl} t_r.$$

Inegalitatea

$$(\beta_{0l} + \beta_{1l} t_1 + \ldots + \beta_{rl} t_r)^2 \leqslant (\beta_{0l}^2 + \beta_{1l}^2 + \ldots + \beta_{rl}^2)(1 + t_1^2 + \ldots t_r^2)$$

ne îndreptăţeşte să afirmăm că

$$\int_{\mathcal{S}} \gamma_l^2(t) d(T) \leqslant (\beta_{0l}^2 + \beta_{1l}^2 + \ldots + \beta_{rl}^2) \int_{\mathcal{S}} (1 + t_1^2 + \ldots + t_r^2) d(T)$$

deci că este convergentă.

În [4] B. Bereanu obţine noi rezultate privind distribuţiile variabilelor aleatoare

$$\tilde{\gamma}(t) = \min_{x \in \mathcal{D}} c(t)x, \quad \mathcal{D} = \{x | Ax = b, x \geqslant 0\}; \quad c(t) = c^0 + \sum_{k=1}^{r} c^k t_k \qquad \text{(I.6.22)}$$

$$\gamma(t) = \min_{x \in \mathcal{D}_t} cx, \quad \mathcal{D}_t = \{x | Ax = b(t), x \geqslant 0\}; \; b(t) = b^0 + \sum_{k=1}^{r} b^k t_k. \qquad \text{(I.6.23)}.$$

În primul rînd se demonstrează

Lema 1. Fie **P** distribuţia probabilităţilor unui vector aleator $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ definit pe o σ — algebră de submulţimi Borel din R^n şi L_i $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $1 \leqslant i \leqslant m$ funcţii reale, Borel — măsurabile şi mărginite pe toată mulţimea de definiţie, cu excepţia a cel mult unei mulţimi de probabilitate nulă. Se defineşte

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_n) = L_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \; \xi \in Q_i \; 1 \leqslant i \leqslant m \qquad \text{(I.6.24)}$$

unde Q_i este o submulţime Borel din R^n care îndeplineşte condiţiile:

(i) $\bigcup_i Q_i = R^n$

(ii) $\mathbf{P}(Q_i) = q_i > 0$

(iii) $\mathbf{P}(Q_i \cap Q_j) = 0$ dacă $i \neq j$.

Fie $\Phi_i(x)$ funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $L_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ condiţionată de Q_i. Funcţia de repartiţie a variabilei $L(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i \Phi_i(x) \qquad \text{(I.6.25)}$$

Demonstraţie. Din definiţia funcţiei $L(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ rezultă că este Borel-măsurabilă şi mărginită aproape peste tot în R^n încît $L(\xi)$ este o variabilă aleatoare cu valori reale a cărei distribuţie de pro-

Scanned with OKEN Scanner

babilitate este definită pe mulțimea de submulțimi Borel din R^n. Fie A evenimentul aleator $\{\xi | L(\xi) < x\}$. Deoarece

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap Q_i)$$

și ținînd seamă de condiția $\mathbf{P}(Q_i \cap Q_j) = 0$ pentru $i \neq j$, avem:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A \cap Q_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(Q_i)\mathbf{P}(A|Q_i). \qquad \text{(I.6.26)}$$

Dar $\mathbf{P}(A|Q_i) = \mathbf{P}\{(L(\xi) < x | \ \xi \in Q_i\} = \Phi_i(x)$ încît din (I.6.26) rezultă (I.6.25)

Lema 2. Fie $L_i(\xi)$, m variabile aleatoare absolut continue, $\varphi_i(x)$ densitățile lor de probabilitate și $L(\xi)$ funcția definită de (I.6.24). Funcția densității de probabilitate, $\varphi(x)$, a variabilei $L(\xi)$ este:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i \varphi_i(x). \qquad \text{(I.6.27)}$$

Teorema III. Funcțiile de distribuție $F_{\tilde{\gamma}}(z)$, $F_{\gamma}(z)$ și funcțiile densităților de probabilitate $f_{\tilde{\gamma}}(z)$, $f_{\gamma}(z)$ ale variabilelor aleatoare $\tilde{\gamma}(z)$, $\gamma(z)$ definite de (I.6.22) și (I.6.23) sînt

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\gamma}}(z) &= \sum_{l=1}^{q} \tilde{p}_l \tilde{F}_l(z); \qquad F_{\gamma}(z) = \sum_{l=1}^{q} p_l F_l(z) \\ f_{\tilde{\gamma}}(z) &= \sum_{l=1}^{q} p_l \tilde{f}_l(z); \qquad f_{\gamma}(z) = \sum_{l=1}^{q} p_l f_l(z) \end{aligned} \qquad \text{(I.6.28)}$$

unde $\tilde{p}_l = \mathbf{P}(\tilde{\Gamma}_l)$, $p_l = \mathbf{P}(\Gamma_l)$ sînt respectiv probabilitățile fundamentale ale programelor stochastice (I.6.22) și (I.6.23); $\tilde{F}_l(z)$, $\tilde{f}_l(z)$, $F_l(z)$ și $f_l(z)$ sînt funcțiile de distribuție și funcțiile densităților de probabilitate ale variabilelor aleatoare $\tilde{\gamma}(t)$ și $\gamma(t)$.

Demonstrație. Fie $\tilde{\Gamma}_l$, Γ_l, $1 \leqslant l \leqslant q$ regiunile de decizii ale programelor stochastice (I.6.22) respectiv (I.6.23) și $\tilde{B}_l$, B_l bazele optime corespunzătoare. Avem

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_l(t) &= c(t)\tilde{B}_l^{-1}b = (c^0 + c^1 t_1 + \ldots + c^r t_r)\tilde{B}_l^{-1}\, b = \\ &= \alpha_{0l} + \alpha_{1l}\, t_1 + \ldots + \alpha_{rl} t_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_l(t) &= cB_l^{-1}b(t) = cB_l^{-1}(b^0 + b^1 t_1 + \ldots + b^r t_r) = \\ &= \beta_{0l} + \beta_{1l}\, t_1 + \ldots + \beta_{rl} t_r \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_l(t)$ pentru $t \in \tilde{\Gamma}_l$ și $\gamma(t) = \gamma_l(t)$ pentru $t \in \Gamma_l$. Este evident că funcțiile $\tilde{\gamma}_l(t)$, $\gamma_l(t)$ și mulțimile $\tilde{\Gamma}_l$, Γ_l satisfac condițiile în care sînt aplicabile lemele 1 și 2 încît formulele (I.6.28) se obțin din (I.6.25) și (I.6.27) luînd

$$\begin{array}{lll} q_i = \mathbf{P}(\tilde{\Gamma}_l) & \text{sau} & q_i = \mathbf{P}(\Gamma_l) \\ \Phi_i(x) = \tilde{F}_l(z) & \text{sau} & \Phi_i(x) = F_l(z) \\ \varphi_i(x) = \tilde{f}_l(z) & \text{sau} & \varphi_i(x) = f_l(z). \end{array}$$

Programe liniare în două stadii

Fiind dată problema de programare liniară cu restricții aleatoare

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min cx, \end{gathered}$$

planificatorul poate alege un program de activitate x înainte de a cunoaște valoarea vectorului aleator b. După ce această valoare este cunoscută, planificatorul va fi obligat să compenseze nepotrivirile dintre programul adoptat și condițiile problemei prin adoptarea unui program suplimentar y. Noile activități incluse în plan se desfășoară în alte condiții încît sistemul de restricții ia forma

$$\begin{gathered} Ax + Ty = b \\ x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \end{gathered} \tag{I.6.29}$$

iar funcția economică se înlocuiește prin $cx + fy$. Vectorul f poate fi privit ca vectorul costurilor de penalizare asociat programului y. Obiectivul problemei este minimizarea funcției

$$\mathbf{E}G(b,x) = \mathbf{E} \min_y (cx + fy) \tag{I.6.30}$$

cu respectarea condițiilor (I.6.29).

În unele cazuri nu sînt aleatoare toate componentele vectorului b. Ecuațiile corespunzătoare componentelor constante ale vectorului b constituie „restricțiile fixe" ale problemei. Uneori structura matricelor A și T impune condiții suplimentare vectorului x. De exemplu, dacă T este o matrice cu elemente pozitive atunci condițiile $Ax + Ty = b$ și $y \geqslant 0$ implică $Ax \leqslant b$. Astfel de condiții se numesc „restricții induse".

În cele ce urmează vom presupune că pentru orice $x \geqslant 0$ care satisface toate restricțiile fixe și induse, și pentru toate valorile pe care le ia b, există un $y \geqslant 0$ astfel încît cuplul (x, y) să satisfacă sistemul

$$Ax + Ty = b.$$

Această condiție pare exigentă dar este necesară pentru ca problema să admită soluții. Vectorul b poate fi o variabilă aleatoare discretă cu un număr finit de valori sau o variabilă aleatoare continuă. Dacă distribuția vectorului b nu este cunoscută modelul (I.6.29) — (I.6. 30) corespunde unui program liniar cu două stadii care se rezolvă în condiții de incertitudine. Dacă distribuția lui b este cunoscută avem un program stochastic cu două stadii.

Să considerăm în primul rînd cazul cînd b este o variabilă aleatoare discretă cu distribuția

$$b \begin{pmatrix} b_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Admitem că pentru orice $x \geqslant 0$ și b_k există un vector y_k care satisface sistemul

$$\begin{aligned} Ty &= b_k - Ax \\ y &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.6.31}$$

și realizează $\min_y (cx + fy)$.

Fie $\mathcal{D}_k(x)$ mulțimea soluțiilor sistemului (I.6.31) și

$$G_k(b_k, x) = \{\min_y (cx + fy) | y \in \mathcal{D}_k(x)\}.$$

Dacă problema (I.6.31) admite soluții optime multiple și se alege una oarecare dintre acestea, $G_k(b_k, x)$ are aceeași valoare, oricare ar fi soluția optimă aleasă. $G(b,x)$ este o variabilă aleatoare discretă care ia r valori și

$$\mathbf{P}[G(b,x) = G_k(b_k,x)] = p_k \text{ pentru } 1 \leqslant k \leqslant r.$$

încît

$$\mathbf{E}G(b,x) = \sum_{k=1}^{r} p_k G_k(b_k,x) = cx + \sum_{k=1}^{r} p_k f y_k.$$

Soluția optimă a problemei (I.6.29 — I.6.30) este vectorul x^* pentru care se obține

$$\min_x \mathbf{E}G(b,x) = \min_x \left(cx + \sum_{k=1}^{r} p_k f y_k \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele expuse rezultă că x^* se găsește rezolvînd problema de programare liniară deterministică :

$$\begin{aligned} & Ax + Ty_1 = b_1 \\ & Ax + Ty_2 = b_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & Ax + Ty_r = b_r \\ & x \geqslant 0 ; y_k \geqslant 0 \qquad k = 1, \dots, r \\ & \min_{x, y_1, \dots, y_r} \{cx + p_1 f y_1 + p_2 f y_2 + \dots + p_r f y_r\}. \end{aligned} \tag{I.6.32}$$

Modelul (I.6.32) conține $m \times r$ ecuații și $n + n_1 r$ necunoscute, dacă n este numărul componentelor vectorului x și n_1 numărul componentelor vectorului y, încît rezolvarea prin metoda simplex comportă un volum mare de calcule. G. B. Dantzig și A. Madansky [17] au găsit un algoritm special pentru rezolvarea problemei (I.6.32) care va fi expus în cuprinsul acestui paragraf.

Exemplul III. Să se găsească soluția problemei

$$x_1 + 2x_2 + y_1 - 3y_2 = b_1$$

$$x_1 + x_2 - y_1 + 2y_2 = b_2$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0$$

$$\min_x \mathbf{E} \min_y (3x_1 + x_2 + y_1 - y_2)$$

în care vectorul b poate lua valorile $b^1(1 ; 3)$ și $b^2(3 ; 5)$ cu probabilitățile $\mathbf{P}(b = b^1) = 0{,}2$ și $\mathbf{P}(b = b^2) = 0{,}8$.
Soluția căutată se obține rezolvînd problema de programare liniară deterministică

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + y_1 - 3y_2 = 1 \\ & x_1 + x_2 - y_1 + 2y_2 = 3 \\ & x_1 + x_2 + z_1 - 3z_2 = 3 \\ & x_1 + x_2 - z_1 + 2z_2 = 5 \\ & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 ;\ z \geqslant 0 \\ & \min_{x,y,z} \{3x_1 + x_2 + 0{,}2(y_1 - y_2) + 0{,}8(z_1 - z_2)\}. \end{aligned}$$

Pentru ca aplicarea algoritmului simplex să nu necesite introducerea a patru variabile artificiale, sistemul de ecuații poate fi transformat înlocuind ecuația a doua prin suma primelor două ecuații și ecuația a patra prin suma ultimelor două. Vom dispune de o soluție inițială de bază, ușor de calculat adăugînd variabilele artifi-

Scanned with OKEN Scanner

ciale ζ_1 şi ζ_2 în ecuaţia a doua şi a patra. Modelul căruia îi aplicăm algoritmul simplex este

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + y_1 - 3y_2 &= 1\\
2x_1 + 3x_2 - y_2 + \zeta_1 &= 4\\
x_1 + 2x_2 + z_1 - 3z_2 &= 3\\
2x_1 + 3x_2 - z_2 + \zeta_2 &= 8\\
x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad z \geqslant 0,\quad \zeta \geqslant 0 &
\end{aligned}$$

$$\min_{x,y,z,\zeta} \{3x_1 + x_2 + 0{,}2y_1 - 0{,}2y_2 + 0{,}8z_1 - 0{,}8z_2 + M\zeta_1 + M\zeta_2\}$$

Soluţia optimă se obţine în iteraţia a parta şi este $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $y_1 = 10$; $y_2 = 5$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1$ iar valoarea optimă a funcţiei obiectiv este 3,8.

Teorema IV. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca vectorul x^* să fie soluţia optimă a problemei de programare stochastică în două stadii

$$\begin{gathered}
Ax + Ty = b\\
x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0\\
\min_x \mathbf{E} \min_y (cx + fy)\\
b\begin{pmatrix} b_k \\ p_k \end{pmatrix} \qquad k = 1, \ldots, r
\end{gathered} \tag{I.6.33}$$

este să existe r vectori λ_k, $k = 1, \ldots, r$ şi r vectori y_k, $k = 1, \ldots, r$ astfel încît

$$\left[c - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A\right] x^* = 0 \tag{I.6.34}$$

$$[p_k f - \lambda_k T] y_k = 0 \quad k = 1, \ldots, r \tag{I.6.35}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k A \leqslant c \tag{I.6.36}$$

$$\lambda_k T \leqslant p_k f \qquad k = 1, \ldots, r \tag{I.6.37}$$

Demonstraţie. Din discuţiile anterioare a rezultat că problema (I.6.33) este echivalentă cu (I.6.32). Pe de altă parte se ştie că determinarea extremelor unei funcţii ale cărei variabile sînt obligate să satisfacă anumite condiţii, problemă de extreme legate, se poate rezolva prin metoda multiplicatorilor Lagrange. În problemele de programare nu se foloseşte această metodă din cauza condiţiilor de

Scanned with OKEN Scanner

nenegativitate impuse variabilelor. J.B.Brans [8] utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru a dovedi valabilitatea condițiilor (I.6.34—I.6.37). Pentru aceasta se admite că matricele A și T din (I.6.32) sînt formate dintr-un singur element. Este evident că această ipoteză nu micșorează generalitatea demonstrației. Condițiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ sînt înlăturate dacă se ia

$$x = \zeta^2; \; y_k = \eta_k^2; \; k = 1, \; \ldots, \; r. \tag{I.6.38}$$

Cu această notație problema (I.6.32) este înlocuită prin problema minimizării funcției

$$F(\zeta, \eta_1, \ldots, \eta_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = c\zeta^2 + \sum_{k=1}^{r} p_k f \eta_k^2 + \\ + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (b_k - A\zeta^2 - T\eta_k^2). \tag{I.6.39}$$

Se știe că soluția ζ^*, η_k^*, λ_k^* $k = 1, \ldots, r$ care realizează minimul funcției $F(\zeta, \eta_1, \ldots, \eta_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ satisface condițiile

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0; \; \frac{\partial F}{\partial \eta_k} = 0; \; \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0 \quad k = 1, \; \ldots, \; r$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \geqslant 0; \; \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_k^2} \geqslant 0; \; \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_k^2} \geqslant 0 \quad k = 1, \; \ldots \; r.$$

Pentru funcția definită de (I.6.39) aceste condiții sînt:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \left[c - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A \right] \zeta = 0 \quad \text{sau} \quad \left[c - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A \right] x = 0 \tag{I.6.40}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_k} = [p_k f - \lambda_k T] \eta_k = 0 \quad \text{sau} \quad [p_k f - \lambda_k T] y = 0; \; k = 1, \ldots, r \tag{I.6.41}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = b_k - A\zeta^2 - T\eta_k^2 = 0 \quad \text{sau} \quad Ax = b_k - Ty_k \tag{I.6.42}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = c - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \sum_{k=1}^{r} A\lambda_k \leqslant c \tag{I.6.43}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta_k^2} = p_k f - \lambda_k T \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \lambda_k T \leqslant p_k f \tag{I.6.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că dacă x^* este optim condițiile (I.6.40 — I.6.44) sînt satisfăcute.

Multiplicatorii Lagrange λ_k, $k = 1, \ldots, r$ au o interpretare simplă în problemele de programare. În adevăr, scriind dualul modelului (I.6.32) și notînd variabilele duale cu λ_k avem:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A \leqslant c \\ \lambda_k T \leqslant p_k f \qquad k = 1, \ldots, r \\ \lambda_k \text{ oarecare} \\ \max \sum \lambda_k b. \end{gathered} \tag{I.6.45}$$

Restricțiile modelului (I.6.45) sînt identice cu condițiile (I.6.36), (I.6.37) încît vectorii λ_k sînt soluții ale problemei duale.

Pentru completarea demonstrației rămîne de arătat că relațiile (I.6.34—I.6.37) constituie condiții suficiente pentru ca x^* să fie soluția optimă a problemei (I.6.32). În adevăr, dacă λ_k satisfac restricțiile problemei duale și x este nenegativ $\left[c - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A\right] x$ este o sumă de numere pozitive care nu poate fi nulă decît dacă fiecare termen este nul. Vectorul x are n componente din care, putem admite că, s sînt pozitive și $n-s$ sînt nule. Se știe că orice componentă pozitivă corespunde unui vector care aparține bazei și că unui vector care nu face parte din bază îi corespunde o componentă nulă. Fie x_t^* una din cele s componente pozitive ale vectorului x^*. Coeficientul lui x_t^* în (I.6.34) este

$$c_t - \sum_{i=1}^{m} a_{it} \lambda_i = 0$$

dacă relația (I.6.34)este satisfăcută. Fie x_q^* o componentă nulă a vectorului x^*. Coeficientul lui x_q^* în (I.6.34) este

$$c_q - \sum_{i=1}^{m} a_{iq} \lambda_q$$

adică restricția q din programul dual încît, dacă λ_q este o soluție a problemei duale, atunci

$$\sum_{i=1}^{m} a_{iq} \lambda_q - c_q \leqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă fără dificultate că această expresie este diferența $z_j - c_j$ din algoritmul simplex. Se știe că dacă $z_j - c_j \leqslant 0$ pentru toți vectorii care nu aparțin bazei, soluția este optimă, deci, dacă sînt îndeplinite condițiile stipulate, programul x^* este optim.

Pe baza teoremei IV dualul modelului (I.6.32) poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned} & p_1\lambda_1 A + p_2\lambda_2 A + \ldots + p_r\lambda_r A \leqslant c \\ & \lambda_1 T \leqslant f \\ & \lambda_2 T \leqslant f \\ & \qquad \ddots \\ & \lambda_r T \leqslant f \\ & \max \{p_1\lambda_1 b_1 + p_2\lambda_2 b_2 + \ldots + p_r\lambda_r b_r\}. \end{aligned} \tag{I.6.46}$$

G. B. Dantzig și A. Madansky [17] construiesc un algoritm pentru rezolvarea problemei de programare cu două stadii în care b este o variabilă aleatoare discretă cu un număr finit de valori, aplicînd modelului (I.6.46) principiul descompunerii [18]. Programul „director" este format de prima restricție din (I.6.46), celelalte restricții constituind un singur „subprogram".

Dacă se notează cu

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & T \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = [p_1 A, p_2 A, \ldots, p_r A]$$

$$\tilde{f} = [f, f, \ldots, f]$$

$$\tilde{b} = [p_1 b_1, p_2 b_2, \ldots, p_r b_r]$$

programul (I.6.46) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} & \lambda\tilde{A} \leqslant c \\ & \lambda\tilde{T} \leqslant \tilde{f} \\ & \max \lambda\tilde{b}. \end{aligned} \tag{I.6.47}$$

Presupunînd că mulțimea soluțiilor sistemului $\lambda\tilde{T} \leqslant \tilde{f}$ este mărginită și că soluțiile extreme ale acestui sistem sînt $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_t^*$ fie

$$P_j = \lambda_j^* \tilde{A} \text{ și } r_j = \lambda_j^* \tilde{b} \quad \text{pentru } j = 1, \ldots, t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste notaţii, problema (I.6.47) este echivalentă cu a găsi t numere $\pi_1, \ldots, \pi_t$ astfel încît

$$\begin{gathered} P_1\pi_1 + P_2\pi_2 + \ldots + P_t\pi_t \leqslant c \\ \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_t = 1 \\ \pi_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, t \\ r_1\pi_1 + r_2\pi_2 + \ldots + r_t\pi_t = \max. \end{gathered} \tag{I.6.48}$$

G.B.Dantzig şi Ph. Wolfe [18] demonstrează că

$$\lambda^* = \sum_{j=1}^{t} \pi_j \lambda_j^*$$

este soluţia optimă pentru (I.6.47) deci şi pentru (I.6.46). Dacă problema (I.6.48) s-ar rezolva prin metoda simplex ar trebui să fie cunoscuţi toţi coeficienţii $P_1, P_2, \ldots, P_t$ deci toate soluţiile extreme ale sistemului $\lambda\widetilde{T} \leqslant \widetilde{f}$. Acest sistem poate avea foarte multe soluţii extreme încît sarcina determinării lor să fie dificilă. Dacă se foloseşte algoritmul specific metodei de descompunere, este suficient să fie cunoscuţi la început numai $n+1$ dintre coeficienţii $P_1, P_2, \ldots, P_t$ deoarece modelul (I.6.48) are $n+1$ restricţii. Cele $n+1$ soluţii de bază λ_j^* necesare pentru calculul coeficienţilor P_j se pot obţine folosind prima fază a algoritmului simplex cu două faze [35]. Astfel sînt determinaţi multiplicatorii simplex asociaţi acestor baze. Ei sînt folosiţi pentru a genera acele soluţii extreme ale sistemului $\lambda\widetilde{T} \leqslant \widetilde{f}$ care par a fi mai indicate. Multiplicatorii simplex pentru primele n restricţii constituie vectorul x. Fie z vectorul format din multiplicatorii simplex ai ultimelor restricţii.

Algoritmul fiind iterativ, la fiecare iteraţie se obţin alţi multiplicatori simplex încît vom nota cu x^l şi z^l vectorii formaţi din multiplicatorii simplex ai iteraţiei l şi cu x^0, z^0 pe cei asociaţi bazei iniţiale. Pentru a stabili dacă x^0 este optim trebuie calculat vectorul λ^0 care realizează

$$\max [\lambda(\widetilde{b} - \widetilde{A}x^0 - z^0)]$$

cu condiţia

$$\lambda\widetilde{T} \leqslant \widetilde{f}.$$

Dacă $\lambda^0(\widetilde{b} - \widetilde{A}x^0) - z^0 \geqslant 0$ atunci x^0 este soluţia optimă a problemei de programare cu două stadii. Dacă această condiţie nu este îndeplinită se adaugă bazei iniţiale vectorul coloană

$$\begin{bmatrix} \lambda^0\widetilde{A} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

și funcției obiectiv termenul $\lambda^0 b$. Aplicînd algoritmul simplex noii probleme se găsește o altă bază și multiplicatorii simplex x^s, z^s; se calculează λ^s care realizează

$$\max \lambda(\tilde{b}-\tilde{A}x')-z'$$

cu condiția

$$\lambda \tilde{T} \leqslant f$$

și se verifică dacă $\lambda'(\tilde{b}-\tilde{A}x')-z' \geqslant 0$.

Să presupunem că, în iterația b, avem

$$\max_{\lambda \tilde{T} \leqslant \tilde{f}} \lambda(\tilde{b}-\tilde{A}x^l)-z^l \geqslant 0$$

atunci, x^l este soluția optimă. Algoritmul conduce la determinarea soluției optime după un număr finit de etape deoarece numărul vectorilor P_j este finit. Se poate arăta că testul de optimalitate al algoritmului descompunerii este echivalent cu condițiile stabilite prin teorema IV pentru optimalitatea unei soluții.

Să presupunem acum că b este o variabilă aleatoare continuă și să notăm cu $\varphi(b)$ funcția de distribuție a acestei variabile.
Pentru a găsi, în aceste condiții, soluția optimă a problemei cu două stadii, vom considera problemele duale

$$\begin{aligned} &Ty = b-Ax \\ &y \geqslant 0 \qquad \text{(I.6.49)} \\ &\min_y (cx+fy) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\lambda T \leqslant f \\ &\lambda \text{ oarecare} \qquad \text{(I.6.50)} \\ &\max_\lambda \lambda(b-Ax). \end{aligned}$$

Se admite că, pentru orice $x \geqslant 0$ mulțimea soluțiilor sistemului $\lambda T \leqslant f$ este nevidă și mărginită. Fie $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_q^*$ soluțiile de bază ale acestui sistem pentru b și x determinați. Notînd cu $\Gamma(\lambda_r^*)$, $r=1,\ldots,q$ conurile convexe asociate soluțiilor de bază, probabilitatea ca λ_r^* să fie soluția problemei (I.6.50) este

$$\mathbf{P}(\lambda^* = \lambda_r^*) = \int_{\Gamma(\lambda_r^*)} d\varphi(b).$$

Deoarece funcțiile obiectiv ale problemelor duale au valori egale pentru orice soluție optimă, avem

$$G(b,x) = cx + \lambda_r^*(b - Ax)$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$\mathbf{E}G(b,x) = cx + \sum_{r=1}^{q} \int_{\Gamma(\lambda_r^*)} \lambda_r^*(b - Ax)d\varphi(b). \tag{I.6.51}$$

Soluţia optimă a problemei cu două stadii este vectorul x care realizează

$$\min_x \mathbf{E}G(b,\ x) \qquad x \geqslant 0 \tag{I.6.52}$$

unde $\mathbf{E}G(b,x)$ dat de (I.6.51) este o funcţie convexă de x.
Dacă unele dintre componentele vectorului b sînt constante, modelul problemei de programare cu două stadii este

$$\begin{gathered} A_1x = b_1 \\ A_2x + Ty = b_2 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ \min_x \mathbf{E} \min_y (cx + fy) \end{gathered} \tag{I.6.53}$$

în care b_1 este format din elementele constante ale vectorului b şi b_2 din elementele aleatoare. În acest caz, pentru determinarea funcţiei $\mathbf{E}G(b,x)$ se caută soluţiile extreme ale problemei

$$\begin{gathered} \lambda T \leqslant b_2 \\ \lambda \text{ oarecare} \\ \max_y\ (b_2 - A_2x) \end{gathered} \tag{I.6.54}$$

Soluţia problemei (I.6.53) se găseşte rezolvînd problema de programare neliniară

$$\begin{gathered} A_1x = b_1 \\ x \geqslant 0 \\ \min_x \mathbf{E}G(b,\ x) \end{gathered} \tag{I.6.55}$$

Deoarece $\mathbf{E}G(b,x)$ este o funcţie convexă de x definită pe o mulţime convexă, (I.6.55) este o problemă de programare convexă care se poate rezolva prin metodele specifice acestei clase de probleme. G.B.Dantzig şi A.Madansky [17] folosesc principiul descompunerii

Scanned with OKEN Scanner

și pentru rezolvarea acestei probleme scriind modelul (I.6.55) sub forma:

$$\begin{gathered} A_1 x = b_1 \\ x \geqslant 0 \\ w + \mathbf{E}G(b,x) = 0 \\ \max \ w \end{gathered} \tag{I.6.56}$$

și considerînd ca „program director" $A_1 x = b_1$, $x \geqslant 0$ și ca subprogram unic, $w + \mathbf{E}G(b,x) = 0$

Problema extremală echivalentă cu programul director este

$$\begin{gathered} \lambda_1(A_1 x^1) + \lambda_2(A_1 x^2) + \ldots + \lambda_k (A_1 x^k) = b_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1 \\ \min\{\mathbf{E}\lambda_1 G(b,x^1) + \mathbf{E}\lambda_2 G(b,x^2) + \ldots + \lambda_k \mathbf{E}G(b,x^k)\} \end{gathered} \tag{I.6.57}$$

$x^1, x^2, \ldots, x^k$ pot să nu fie realizabili dar trebuie să existe o combinație liniară a acestor vectori care să fie realizabilă. Rezolvînd problema (I.6.57) se determină multiplicatorii simplex ρ_0^k, ρ^k și apoi se rezolvă subprogramul

$$\begin{gathered} w + \mathbf{E}G(b,\ x) = 0 \\ \max \ (w + \rho^k A_1 x + \rho_0^k) \end{gathered} \tag{I.6.58}$$

sau, ceeace este echivalent, trebuie găsit $x = x^{k+1}$ care minimizează funcția

$$\delta_k(x) = \mathbf{E}G(b,\ x) - \rho^k A_1 x - \rho_0^k$$

Dacă pentru orice x,

$$\mathbf{E}G(b,\ x) \geqslant \rho^k A_1 x + \rho_0^k$$

atunci x^{k+1} este soluția optimă. În caz contrar, matricea problemei (I.6.57) se completează cu vectorul coloană.

$$\begin{bmatrix} A_1 x^{k+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

și se aplică din nou algoritmul. Se poate demonstra că algoritmul este convergent.

G. B. Dantzig și A. Madansky [17] au stabilit condițiile de optimalitate pentru o soluție realizabilă a unui program liniar cu două

Scanned with OKEN Scanner

stadii în ipoteza că se poate defini o mulțime convexă K de vectori x care îndeplinesc condițiile:

(*i*) orice $x \in K$ este nenegativ;

(*ii*) pentru orice valoare a vectorului b și orice $x \in K$, există un vector y care satisface restricțiile problemei. În aceste condiții soluția optimă a programului liniar cu două stadii poate fi redefinită ca fiind vectorul $x \in K$ care realizează minimul funcției

$$\mathbf{E}G(b,x) = cx + \mathbf{E} \min_y fy.$$

În cele ce urmează se vor nota cu $y^*(b,x)$ și $\lambda^*(b,x)$ soluțiile optime, pentru b dat și $x \in K$, ale problemelor duale:

$$\begin{aligned} Ty &= b - Ax \\ y &\geqslant 0 \\ &\min fy \end{aligned} \qquad \text{(I.6.59)}$$

$$\begin{aligned} \lambda T &\leqslant f \\ \lambda &\text{ oarecare} \\ &\max \lambda(b - Ax) \end{aligned} \qquad \text{(I.6.60)}$$

În baza teoremei dualității, avem

$$\min_y fy = \lambda^*(b,x)[b - Ax]$$

încît, pentru orice $x \in K$

$$\min_y (cx + fy) = cx + \lambda^*(b,x)[b - Ax]. \qquad \text{(I.6.61)}$$

Deoarece s-a notat cu

$$G(b,x) = \{\min_x (cx + fy) | Ax + Ty = b, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\},$$

din (I.6.61) rezultă că

$$\mathbf{E}G(b,x) = cx + \mathbf{E}\lambda^*(b,x)[b - Ax]. \qquad \text{(I.6.62)}$$

Această expresie a funcției $\mathbf{E}G(b,x)$ conduce la următoarea condiție necesară pentru ca vectorul x^* să fie optimal:

Teorema V. Dacă x^* este optimal, pentru orice $x_1 \in K$ este satisfăcută inegalitatea:

$$[c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)A]x^* \leqslant [c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)A]x_1, \qquad \text{(I.6.63)}$$

în care $\lambda^*(b,x_1)$ este soluția optimă a problemei (I.6.60) pentru $x = x_1$.

Demonstrație. Fie $\lambda^*(b,x^*)$ soluția optimă a problemei (I.6.60) pentru $x = x^*$. Deoarece $\lambda^*(b,x_1)$ satisface restricțiile problemei, deci este o soluție realizabilă, avem

$$\lambda^*(b,x_1)[b - Ax^*] \leqslant \lambda^*(b,x^*)[b - Ax^*]. \qquad \text{(I.6.64)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte x^* este prin ipoteză soluţia optimă a problemei cu două stadii şi x_1 o soluţie realizabilă deoarece $x_1 \in K$ încît

$$\min_x \mathbf{E}G(b,x) = \mathbf{E}G(b,x^*) \leqslant \mathbf{E}G(b,x_1)$$

sau

$$cx^* + \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)[b - Ax^*] \leqslant cx_1 + \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)[b - Ax_1], \qquad \text{(I.6.65)}$$

Luînd valorile medii în ambii membri ai inegalităţii (I.6.64) şi adunînd relaţia obţinută cu (I.6.65) avem inegalitatea

$$cx^* + \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)[b - Ax^*] \leqslant cx_1 + \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)[b - Ax_1]$$

care demonstrează teorema.

Lema 3. Fie $\lambda^*(b,x_1)$ soluţia optimă a problemei (I.6.60) pentru $x_1 \in K$. Hiperplanul

$$z = [c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)A]x + \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)b \qquad \text{(I.6.66)}$$

este un hiperplan suport pentru $\mathbf{E}G(b,x)$ în punctul $x = x_1$.

Demonstraţie. Funcţia $\mathbf{E}G(b,x)$ este o funcţie convexă de x şi $z(x_1) = \mathbf{E}G(b,x_1)$ încît este suficient să arătăm că pentru $x \neq x_1$

$$\mathbf{E}G(b,x) \geqslant z$$

deci că

$$cx + \mathbf{E}\lambda^*(b,x)[b - Ax] \geqslant [c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)A]x + \mathbf{E}\lambda^*(b,x_1)b. \qquad \text{(I.6.67)}$$

Inegalitatea (I.6.67) este adevărată întrucît relaţia

$$\lambda^*(b,x)[b - Ax] \geqslant \lambda^*(b,x_1)[b - Ax]$$

este evidentă. Într-adevăr $\lambda^*(b,x)$ fiind soluţia optimă a problemei (I.6.60) pentru x, valoarea funcţiei obiectiv pentru $\lambda^*(b,x)$ este cel puţin egală cu valoarea acestei funcţii pentru orice altă soluţie a sistemului de restricţii, în particular pentru $\lambda^*(b,x_1)$.

Teorema VI. Dacă x^* este un punct interior al mulţimii soluţiilor realizabile şi $\mathbf{E}G(b,x)$ este derivabilă în vecinătatea punctului x^*, condiţia necesară şi suficientă pentru ca x^* să fie soluţia optimă a problemei cu două stadii este ca

$$c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)A = 0 \qquad \text{(I.6.68)}$$

$\lambda^*(b,x^*)$ fiind soluţia optimă a problemei (I.6.60) pentru $x = x^*$.

Demonstraţie. $\mathbf{E}G(b,x)$ fiind o funcţie convexă şi derivabilă în x^*, hiperplanul suport pentru $\mathbf{E}G(b,x)$ în punctul $x = x^*$ este tangent la $\mathbf{E}G(b,x)$ în acest punct. Ecuaţia acestui hiperplan fiind

$$z = [c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)A]x + \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)b$$

Scanned with OKEN Scanner

urmează că

$$\left.\frac{\partial \mathbf{E}G(b,\,x)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)A.$$

Dacă x^* este punct extrem pentru $\mathbf{E}G(b,x)$ atunci derivata funcției în acest punct se anulează încît

$$c - \mathbf{E}\lambda^*(b,x^*)A = 0$$

este o condiție necesară pentru ca $x = x^*$ să fie soluția optimă a problemei cu două stadii. Dacă x^* este un punct interior al mulțimii convexe K, această condiție este și suficientă.

Fie $y^*(b,x)$ și $\lambda^*(b,x)$ soluțiile optime ale problemelor (I.6.59) și (I.6.60) pentru un x oarecare din K, și

$$\Psi(y,\lambda|x) = fy + \lambda(b - Ax - Ty) \tag{I.6.69}$$

$$\Phi(x,y,\lambda) = cx + \mathbf{E}\Psi(y,\,\lambda|x). \tag{I.6.70}$$

Folosind aceste notații se poate enunța:

Teorema VII. Dacă x^* este soluția optimă pentru problema cu două stadii atunci

$$\Phi(x^*,y^*,\lambda) \leqslant \Phi(x^*,y^*,\lambda^*) \leqslant \Phi(x,y^*,\lambda^*). \tag{I.6.71}$$

Invers, dacă există un cuplu de vectori x^*, λ^* care satisfac (I.6.71) și îndeplinesc condițiile $x^* \in K$, λ^* realizabil pentru (I.6.60), atunci x^* este soluția optimă a problemei cu două stadii iar λ^* este soluția optimă pentru (I.6.60) cînd $x = x^*$.

Demonstrație. Ținînd seama de definițiile funcțiilor $\Phi(x,y,\lambda)$ și $\Psi(y,\lambda|x)$ avem

$$\Phi(x^*,y^*,\lambda) = cx^* + \mathbf{E}\Psi(y^*,\lambda|x^*)\,; \quad \Phi(x^*,y^*,\lambda^*) = cx^* + \mathbf{E}\Psi(y^*,\lambda^*|x^*).$$

Astfel, inegalitatea

$$\Phi(x^*,y^*,\lambda) \leqslant \Phi(x^*,y^*,\lambda^*)$$

este echivalentă cu inegalitatea

$$\Psi(y^*,\lambda|x^*) \leqslant \Psi(y^*,\lambda^*|x^*)$$

care este adevărată deoarece y^*, λ^*, fiind soluții optime ale problemelor (I.6.59) și (I.6.60) pentru x, sînt puncte șa ale funcției $\Psi(y,\lambda|x)$.

Pentru a dovedi inegalitatea

$$\Phi(x^*,y^*,\lambda^*) \leqslant \Phi(x,y^*,\lambda^*)$$

Scanned with OKEN Scanner

trebuie arătat că

$$cx^*+\mathbf{E}fy^*(b,x)+\mathbf{E}\lambda^*(b,x)\,[b-Ax^*-Ty^*(b,x)] \leqslant$$
$$\leqslant cx+\mathbf{E}fy^*(b,x)+\mathbf{E}\lambda^*(b,x)\,[b-Ax-Ty^*(b,x)].$$

Această inegalitate se reduce la

$$[c-\mathbf{E}\lambda^*(b,x)A\,]x^* \leqslant [c-\mathbf{E}\lambda^*(b,x)\,]x$$

care, în baza teoremei V, este satisfăcută dacă x^* este optimal și $x \in K$.

Pentru a demonstra a doua parte a teoremei se va arăta în primul rînd că $\lambda^*(b,x^*)$ este soluția optimă a problemei (I.6.60) pentru $x=x^*$. Să presupunem că această afirmație nu este adevărată și să notăm cu $\bar{\lambda}(b,x^*)$ soluția optimă a acestei probleme pentru $x = x^*$. Deoarece λ^* este o soluție realizabilă și $\bar{\lambda}$ este soluția optimă valoarea funcției obiectiv pentru $\bar{\lambda}$ este cel puțin egală cu valoarea funcției pentru λ^*, deci

$$\bar{\lambda}(b-Ax^*) \geqslant \lambda^*(b-Ax^*). \qquad \text{(I.6.72)}$$

Pe de altă parte, prin ipoteză λ^* satisface inegalitățile (I.6.71) pentru orice λ realizabil, deci și pentru $\lambda = \bar{\lambda}$, încît

$$\Phi(x^*,y^*,\bar{\lambda}) \leqslant \Phi(x^*,y^*,\lambda^*).$$

Înlocuind funcțiile $\Phi(x^*,y^*,\bar{\lambda})$ și $\Phi(x^*,y^*,\lambda^*)$ prin valorile lor, avem

$$cx^*+\mathbf{E}[fy^*+\bar{\lambda}(b-Ax^*-Ty^*)\,] \leqslant cx^*+\mathbf{E}[fy^*+\lambda^*(b-Ax^*-Ty^*)\,]$$

sau

$$\bar{\lambda}(b-Ax^*-Ty^*) \leqslant \lambda^*(b-Ax^*-Ty^*). \qquad \text{(I.6.73)}$$

Deoarece $\bar{\lambda}$ verifică restricțiile problemei (I.6.60) și y este nenegativ, avem:

$$\bar{\lambda}Ty^* \leqslant fy^*. \qquad \text{(I.6.74)}$$

Adunînd inegalitățile (I.6.73) și (I.6.74) obținem relația

$$\bar{\lambda}(b-Ax^*) \leqslant \lambda^*(b-Ax^*)+(f-\lambda^*T)y^*. \qquad \text{(I.6.75)}$$

Dacă λ^* nu este optimal, atunci $(f-\lambda^*T)y^*$ este strict pozitiv și inegalitatea (I.6.75) contrazice relația (I.6.72).

Rămîne de arătat că x^* este optim dacă sînt satisfăcute inegalitățile (I.6.71) în care λ^* este optim pentru (I.6.60) cînd $x=x^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta se observă că, dacă λ^* și y^* sînt soluții optime ale problemelor (I.6.59) și (I.6.60), atunci

$$\Phi(x, y^*, \lambda^*) = \mathbf{E}G(b, x). \tag{I.6.76}$$

În adevăr, scriind $\Phi(x, y^*, \lambda^*)$ sub forma

$$\Phi(x, \lambda^*, y^*) = cx + \mathbf{E}\lambda^*(b, x)[b - Ax] + \mathbf{E}[f - \\ -\lambda^*(b, x)T]y^*(b, x)$$

și ținînd seamă de faptul că pentru orice y_i^* pozitiv restricția i din sistemul $\lambda T \leqslant f$ este satisfăcută cu semnul egal, avem

$$\Phi(x, \lambda^*, y^*) = cx + \mathbf{E}\lambda^*(b, x)[b - Ax] \tag{I.6.77}$$

încît, ținînd seama de expresia lui $\mathbf{E}G(b,x)$ din (I.6.62), avem

$$\Phi(x, \lambda^*, y^*) = \mathbf{E}G(b, x).$$

Cu acest rezultat, inegalitatea

$$\Phi(x^*, \lambda^*, y^*) \leqslant \Phi(x, \lambda^*, y^*),$$

satisfăcută prin ipoteză de x^*, pentru orice $x \in K$, se poate scrie sub forma

$$\mathbf{E}G(b, x^*) \leqslant \mathbf{E}G(b, x)$$

care echivalează cu afirmația că $\mathbf{E}G(b,x^*) = \min_x \mathbf{E}G(b,x)$ deci că x^* este soluția optimă a problemei cu două stadii.

Rezultatele obținute folosesc pentru a stabili următoarea condiție suficientă de optimalitate a unei soluții:

Teorema VIII. Vectorul x^* este soluția optimă a problemei cu două stadii dacă, pentru orice $x \in K$, este satisfăcută inegalitatea

$$[c - \mathbf{E}\lambda^*(b, x^*)A]x^* \leqslant [c - \mathbf{E}\lambda^*(b, x^*)A]x \tag{I.6.78}$$

în care $\lambda^*(b, x^*)$ este soluția optimă a problemei (I.6.60) pentru $x = x^*$.

Demonstrație. Dacă $\lambda(b, x^*)$ este o soluție oarecare a problemei (I.6.60), iar $\lambda^*(b, x^*)$ este soluția optimă, putem scrie

$$\Phi(x^*, y^*, \lambda) = cx^* + \mathbf{E}\{\lambda(b, x^*)[b - Ax^* - Ty^*(b, x)] + \\ + fy^*(b, x^*)\} = cx^* + \mathbf{E}fy^*(b, x^*) = \Phi(x^*, y^*, \lambda^*)$$

deoarece $Ty^*(b, x^*) = b - Ax^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte se observă că ipoteza (I.6.78) este echivalentă cu condiția

$$\Phi(x^*, y^*, \lambda^*) \leqslant \Phi(x, y^*, \lambda^*)$$

încît, conform teoremei VII, x^* este optimal.

Ca exemplu de rezolvare a programelor în două stadii în care b este variabilă aleatoare continuă A. Madansky [32] și J.P.Brans [8] reiau, cu unele modificări, exemplul dat de G.B.Dantzig în Linear Programming and Extensions cap. 25. În cele ce urmează vom reproduce acest exemplu.

Exemplul IV. (Dantzig) O fabrică dispune de 100 unități dintr-o marfă care trebuie expediată într-o anumită localitate pentru a satisface o cerere aleatoare b uniform repartizată în intervalul [70,80]. Prețul unei unități este de \$ 1. Dacă cererea depășește cantitatea primită, centrul de desfacere își procură cantitatea necesară de pe piața locală la prețul de \$ 2 per unitate.

Fie x_1 numărul de unități expediate de fabrică, y_1 numărul unităților achiziționate pe piața locală. Din formularea problemei rezultă că

$$x_1 \leqslant 100$$
$$x_1 + y_1 = b.$$

Variabila y_1 poate fi negativă dacă $x_1 > b$. Pentru ca modelul să conțină numai variabile nenegative luăm $y_1 = z_1 - z_2$, $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$ și astfel se obține sistemul de restricții

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ x_1 + z_1 - z_2 &= b \qquad \text{(I.6.82)} \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0 & \end{aligned}$$

funcția obiectiv fiind

$$\min_{x_1} \mathbf{E} \min_{y_1} (x_1 + 2z_1). \qquad \text{(I.6.83)}$$

Pentru x_1 admisibil, adică $0 \leqslant x_1 \leqslant 100$ și o valoare determinată pentru b, căutăm

$$G(b,x) = \min_{z_1} (x_1 + 2z_1).$$

Dualul modelului (I.6.82-I.6.83) este

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\leqslant 1 \\ \lambda_1 &\leqslant 0 \\ \lambda_2 &\leqslant 2 \\ -\lambda_2 &\leqslant 0 \\ \max\ (100\lambda_1 + b\lambda_2)&. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca ambele variabile duale să fie nenegative se poate înlocui λ_1 prin $-\lambda_1$. Cu această modificare avem modelul

$$\begin{gathered} -\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1 \\ \lambda_2 \leqslant 2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \\ \max\ (-100\lambda_1 + b\lambda_2). \end{gathered} \tag{I.6.84}$$

Din fig. 16 rezultă că soluţiile optime pot fi vîrfurile O, A sau B adică vectorii (0,0), (0,1) sau (1,2). Se deduce cu uşurinţă:

$$G(b, x) = \min_{y_1} (x_1 + 2y_1) = \begin{cases} x_1 + 2(b - x_1) & \text{dacă } x_1 \leqslant b \\ x_1 & \text{dacă } x_1 \geqslant b \end{cases} \tag{I.6.85}$$

$$\mathbf{E}G(b,x) = \begin{cases} 150 - x_1 & \text{dacă } 0 \leqslant x_1 < 70 \\ x_1 + \frac{1}{10}(80 - x_1)^2 & \text{dacă } 70 \leqslant x_1 < 80 \\ x_1 & \text{dacă } 80 \leqslant x_1 \leqslant 100 \end{cases} \tag{I.6.86}$$

$$\min_{x_1} \mathbf{E}G(b, x) = 77{,}5.$$

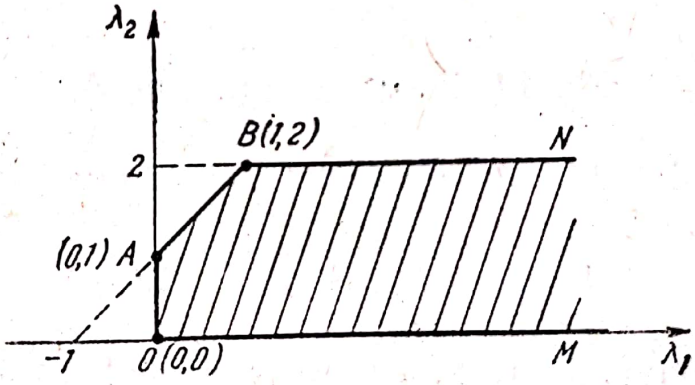

Fig. 16

Valoarea minimă a funcţiei obiectiv se obţine pentru $x_1 = 75$. Se observă că $G(b,x)$ şi $\mathbf{E}G(b,x)$ sînt funcţii convexe de x. Vom verifica pe acest exemplu şi inegalităţile lui A.Madansky

$$\mathbf{E}G(b, x^*(\mathbf{E}b)) \geqslant \min_x \mathbf{E}G(b, x) \geqslant \mathbf{E} \min_x G(b, x) \geqslant \min_x G(\mathbf{E}b, x)$$

Calculăm $\mathbf{E}G(b, x^*(\mathbf{E}b))$

$\mathbf{E}b = 75$, $x^*(\mathbf{E}b) = 75$. Soluţia este evidentă căci, dacă cererea este

Scanned with OKEN Scanner

cunoscută, aprovizionarea centrului de desfacere la un preț minim se face expediind de la fabrică cantitatea necesară. Atunci

$$G(b, x^*(\mathbf{E}b)) = \begin{cases} 75 & \text{dacă } 70 \leqslant b \leqslant 75 \\ 2b-75 & \text{dacă } 75 \leqslant b \leqslant 80 \end{cases} \tag{I.6.87}$$

$$\mathbf{E}G(b, x^*(\mathbf{E}b)) = \frac{1}{10}\int_{70}^{75} 75\, db + \frac{1}{10}\int_{75}^{80} (2b-75)db = 77{,}5. \tag{I.6.88}$$

Rezultă că

$$\mathbf{E}G(b,x^*(\mathbf{E}b)) = \min_x \mathbf{E}G(b,x).$$

Calculăm $\mathbf{E} \min_x G(b,x)$. Avem:

$$\min_x G(b, x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b \leqslant 0 \\ b & \text{dacă } 0 < b \leqslant 100 \\ 2b-100 & \text{dacă } b \geqslant 100 \end{cases} \tag{I.6.89}$$

și:

$$\mathbf{E} \min_x G(b, x) = \frac{1}{10}\int_{70}^{80} b\,db = 75$$

încît

$$\min_x \mathbf{E}G(b, x) > \mathbf{E} \min_x G(b, x).$$

În sfîrșit, avînd $G(\mathbf{E}b, x) = 75$ rezultă că și $\min_x G(\mathbf{E}b, x) = 75$ încît

$$\mathbf{E} \min_x G(b, x) = \min_x G(\mathbf{E}b, x).$$

Modificarea făcută de J. P. Brans la exemplul lui G. B. Dantzig constă în înlocuirea costului de procurare a unei unități de marfă de pe piață cu un parametru $\alpha > 1$. Funcțiile $G(b, x)$ și $\mathbf{E}G(b, x)$ depind astfel de parametrul α și avem

$$G(b, x) = \begin{cases} x_1 + \alpha(b - x_1) & \text{dacă } x_1 \leqslant b \\ x_1 & \text{dacă } x_1 \geqslant b \end{cases} \tag{I.6.90}$$

$$\mathbf{E}G(b, x) = \begin{cases} x_1(1-\alpha) + 75\,\alpha & \text{dacă } 0 \leqslant x_1 < 70 \\ x_1 + \frac{\alpha}{20}(80 - x_1)^2 & \text{dacă } 70 \leqslant x_1 < 80 \\ x_1 & \text{dacă } 80 \leqslant x_1 \leqslant 100. \end{cases} \tag{I.6.91}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\min_x EG(b, x) = 5\left(16 - \frac{1}{\alpha}\right)$ se obține pentru $x_1 = 80 - \frac{10}{\alpha}$. Dacă $\alpha = 1$ adică prețul de achiziție al mărfii pe piață este egal cu prețul mărfii expediate de fabrică, soluția cea mai bună este ca fabrica să expedieze $x_1 = 70$ unități de marfă adică acea cantitate care satisface cererea minimă. Cît timp $1 < \alpha < 2$ este convenabil să se expedieze o cantitate de marfă mai mică decît cererea medie adică $x_1 < 75$; dacă $\alpha > 2$, este preferabil ca $x_1 > 75$.

Exemplul V. Un magazin se poate aproviziona cu mărfurile M_j, $j = 1, \ldots, n$. Cererea pentru aceste mărfuri este sezonieră. Mărfurile care nu s-au vîndut în timpul sezonului se soldează cu 80% din prețul de achiziție. Fie c_j, $j = 1, \ldots, n$ prețul unei unități din M_j, p_j prețul de vînzare, π_j penalizarea pentru fiecare cerere nesatisfăcută și b_j cererea. Magazinul dispune de o sumă de bani S care poate fi investită în comanda unui sortiment de mărfuri M_j care să satisfacă cererile aleatoare b_j. Se presupune că cererile b_j pentru diferitele mărfuri sînt independente și urmează legi normale de distribuție $n(b_j; \mu_j, \sigma_j)$. Magazinul dorește să dimensioneze comanda astfel încît media beneficiului rezultat din desfacerea mărfurilor să fie maximă.

Vom nota cu x_j numărul de unități din M_j comandate de magazin. Variabilele x_j, presupuse continue, sînt supuse restricției

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant S \tag{I.6.92}$$

deoarece valoarea comenzii nu poate depăși suma de care dispune magazinul. Această restricție este deterministică deoarece S și c_j sînt mărimi cunoscute. Se poate imagina și o variantă a acestei probleme considerînd suma S ca un parametru care poate lua valori într-un interval determinat.

Să găsim expresia pentru beneficiul obținut pentru marfa M_j dacă magazinul dispune de x_j unități din M_j:

dacă $b_j \leqslant x_j$, încasează suma $p_j b_j$,

dacă $b_j \geqslant x_j$, încasează suma $p_j x_j$ și pierde $\pi_j(b_j - x_j)$.

Din soldarea mărfurilor nevîndute la sfîrșitul sezonului, pentru M_j se încasează $0{,}80\, c_j(x_j - b_j)$, dacă $b_j \leqslant x_j$ sau o sumă nulă, dacă $b_j > x_j$. Beneficiul se calculează scăzînd din încasări costul de achiziție și penalizările. Încasările se compun din sumele realizate prin vînzări și solduri. Fie C_j beneficiul realizat pentru M_j. Avem:

$$C_j = \begin{cases} p_j x_j - c_j x_j - \pi_j(b_j - x_j) & \text{dacă } x_j \leqslant b_j \\ p_j b_j + 0{,}80 c_j (x_j - b_j) - c_j x_j & \text{dacă } x_j \geqslant b_j \end{cases} \tag{I.6.93}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\mathbf{E}C_j = p_j x_j \int_{x_j}^{\infty} n(b_j;\, \mu_j,\, \sigma_j)db_j + p_j \int_{-\infty}^{x_j} b_j n(b_j;\, \mu_j,\, \sigma_j)db_j +$$

$$+0{,}80c_j \int_{-\infty}^{x_j} (x_j - b_j)n(b_j;\, \mu_j, \sigma_j)db_j - c_j x_j - \pi_j \int_{x_j}^{\infty} (b_j - x_j)n(b_j;\, \mu_j,\, \sigma_j)db_j. \tag{I.6.94}$$

Dacă presupunem că probabilitatea ca cererea să fie $b_j \leqslant 0$ este neglijabilă, limita $-\infty$ a integralelor se înlocuiește cu 0.

Observînd că

$$\int_{-\infty}^{x_j} b_j n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j = \mu_j - \int_{x_j}^{\infty} b_j n(b_j\,;\ \mu_j,\, \sigma_j)db_j \tag{I.6.95}$$

și

$$\int_{-\infty}^{x_j} (x_j - b_j)n(b_j;\, \mu_j,\, \sigma_j)db_j = x_j - \mu_j + \int_{x_j}^{\infty} (b_j - x_j)n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j. \tag{I.6.96}$$

$\mathbf{E}C_j$ se poate scrie sub forma

$$\mathbf{E}C_j = \mu_j(p_j - 0{,}80\,c_j) - 0{,}20c_j x_j - (p_j + \pi_j - 0{,}80c_j) \int_{x_j}^{\infty} (b_j - x_j)n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j.$$

Beneficiul mediu total este $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}C_j$ și problema constă în a determina vectorul nenegativ $x(x_1, \ldots, x_n)$ care satisface condiția

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \mathrm{S} \tag{I.6.97}$$

și realizează

$$\max G = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}C_j. \tag{I.6.98}$$

Această problemă a fost formulată de G. Hadley [23] și rezolvată pentru trei mărfuri cu următoarele date: S = \$ 3000 și

$c_1 = \$\ 35$; $p_1 = 66$; $\pi_1 = 70$; $\mu_1 = 30$; $\sigma_1 = 8$

$c_2 = \$\ 20$; $p_2 = 37$; $\pi_2 = 40$; $\mu_2 = 60$; $\sigma_2 = 12$

$c_3 = \$\ 50$; $p_3 = 105$; $\pi_3 = 220$; $\mu_3 = 15$; $\sigma_3 = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru acest exemplu avem modelul

$$35x_1 + 20x_2 + 50x_3 \leqslant 3\,000$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$$

$$\max\ C = \max\left\{1140 - 7x_1 - 108\int_{x_1}^{\infty}(b_1 - x_1)n(b_1\,;\,30{,}8)db_1 + 1260 -\right.$$

$$- 4x_2 - 61\int_{x_2}^{\infty}(b_2 - x_2)n(b_2\,;\ 60{,}12)db_2 + 975 -$$

$$\left. - 10x_3 - 285\int_{x_3}^{\infty}(b_3 - x_3)n(b_3\,;\ \ 15{,}3)db_3\right.$$

G. Hadley determină în primul rînd $\max\sum_{j=1}^{3}\mathbf{E}C_j$ fără a impune restricţii variabilelor deci rezolvă sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

Pentru calculul derivatelor se observă că

$$\frac{d}{dx_j}\left[\int_{x_j}^{\infty}(b_j - x_j)n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j\right] =$$

$$= \frac{d}{dx_j}\left[\int_{x_j}^{\infty} b_j n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j\right] - \frac{d}{dx_j}\left[x_j\int_{x_j}^{\infty} n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j\right] =$$

$$= x_j n(x_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j) - \int_{x_j}^{\infty} n(b_j;\ \mu_j,\ \sigma_j)\ db_j + x_j n(x_j;\ \mu_j,\ \sigma_j) =$$

$$= -\int_{x_j}^{\infty} n(b_j\,;\ \mu_j,\ \sigma_j)db_j = -\ \Phi\left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)$$

unde

$$\Phi\ (z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel avem:

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = 0 = -7 + 108\,\Phi\left(\frac{x_1 - 30}{8}\right) \quad \text{deci } \Phi\left(\frac{x_1 - 30}{8}\right) = \frac{7}{108} = 0{,}0648$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0 = -4 + 61\,\Phi\left(\frac{x_2 - 60}{12}\right) \quad \text{deci } \Phi\left(\frac{x_2 - 60}{12}\right) = \frac{4}{61} = 0{,}0656$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_3} = 0 = -10 + 285\,\Phi\left(\frac{x_3 - 15}{3}\right) \quad \text{deci } \Phi\left(\frac{x_3 - 15}{3}\right) = \frac{10}{285} = 0{,}0351$$

Din tabelele de valori pentru funcția $\Phi(z)$ găsim

$$\frac{x_1 - 30}{8} = 1{,}515 \qquad \text{încît } x_1 \approx 42$$

$$\frac{x_2 - 60}{12} = 1{,}51 \qquad \text{încît } x_2 \approx 78$$

$$\frac{x_3 - 15}{3} = 1{,}81 \qquad \text{încît } x_3 \approx 20.$$

Suma necesară pentru achiziționarea mărfurilor M_1, M_2, M_3 în cantitățile $x_1 = 42$; $x_2 = 78$; $x_3 = 20$ este $S = 35 \times 42 + 20 \times 78 + 50 \times 20 = \$\ 4030$ deci depășește disponibilul de \$ 3000.

Dacă se neglijează numai condițiile de nenegativitate a variabilelor avem de rezolvat o problemă de extreme legate, deci avem de determinat

$$\max F(x, \lambda) = C + \lambda(3000 - 35x_1 - 20x_2 - 50x_3).$$

Variabilele x_1, x_2, x_3 și λ satisfac condițiile

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

adică sînt soluțiile sistemului de ecuații

$$\Phi\left(\frac{x_1 - 30}{8}\right) = \frac{7 + 35\lambda}{108}$$

$$\Phi\left(\frac{x_2 - 60}{12}\right) = \frac{4 + 20\lambda}{61}$$

$$\Phi\left(\frac{x_3 - 15}{3}\right) = \frac{10 + 50\lambda}{285}$$

$$35x_1 + 20x_2 + 50x_3 = 3000.$$

Metoda propusă pentru rezolvarea acestui sistem se bazează pe încercări. Se alege pentru λ o valoare pozitivă, $\lambda = \lambda_1$ și se calculează

Scanned with OKEN Scanner

x_1, x_2, x_3 din primele trei ecuații. Dacă pentru aceste valori membrul stîng al ultimei ecuații este mai mare decît 3000 se ia $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$ și se repetă calculul. În caz contrar se ia $\lambda = \lambda_2' < \lambda_1$. În acest fel s-au obținut rezultatele următoare:

(19a)

λ	x_1	x_2	x_3	$\sum_{j=1}^{3} c_j x_j$
0,50	36	69	18,5	3565
1,00	32	63,2	17,4	3254
1,50	29	58,3	16,6	3011
1,52	28,8	58,0	16,55	2996

De aici rezultă că soluția care asigură maximul beneficiului mediu este $x_1^* = 29$; $x_2^* = 58$ și $x_3^* = 17$ sau 16 în funcție de hotărîrea de a depăși cu puțin suma de \$ 3000 sau de a investi mai puțin decît disponibilul.

În această problemă avem o singură variabilă de decizie, vectorul $x(x_1\ x_2\ x_3)$. Dacă în formularea problemei penalizările pentru cererile nesatisfăcute sînt înlocuite prin obligația de a satisface integral cererea procurînd mărfurile necesare la un preț de cost $\pi_j > c_j$ se ajunge la o problemă cu două stadii. În acest caz nu mai are sens soldarea mărfurilor rămase în stoc la sfîrșitul sezonului. Folosind aceleași notații și aceleași date numerice ca în formularea anterioară a problemei, cu deosebirea că π_j înseamnă acum costul de achiziție pentru o unitate din M_j comandată ulterior avem

$$G(b, x) = \max_{y} (cx+fy) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (p_i x_j - c_j x_j - \pi_j(b_j - x_j)) & \text{dacă } x_j \leqslant b_j \\ \sum_{j=1}^{n} (p_j b_j - c_j x_j) & \text{dacă } x_j \geqslant b_j. \end{cases}$$

Valoarea medie a funcției $G(b, x)$ este

$$\mathbf{E}G(b,x) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{x_j}^{\infty} p_j x_j - c_j x_j - \pi_j(b_j - x_j)]n(b_j ; \mu_j, \sigma_j)db_j + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x_j} [p_j b_j - c_j x_j]n(b_j ; \mu_j, \sigma_j)db_j. \right\}$$

Expresia $\mathbf{EG}(b, x)$ poate fi transformată folosind egalități asemănătoare cu (I.6.95) și (I.6.96) în

$$\mathbf{EG}(b, x) = \sum_{j=1}^{n} \left[p_j \mu_j - c_j x_j + (p_j + \pi_j) \int_{x_j}^{\infty} (x_j - b_j) n(b_j ; \mu_j, \sigma_j) db_j \right].$$

Deci $\mathbf{EG}(b, x)$ pentru exemplul numeric este:

$$\mathbf{EG}(b, x) = 5775 - 66x_1 - 37x_2 - 105x_3 + 137 \int_{x_1}^{\infty} (x_1 - b_1) n(b_1; 30,8) db_1 +$$

$$+ 77 \int_{x_2}^{\infty} (x_2 - b_2) n(b_2 ; 60, 12) db_2 + 325 \int_{x_3}^{\infty} (x_3 - b_3) n(b_3 ; 15,3) db_3.$$

Soluția Bayes este vectorul nenegativ $x(x_1, x_2, x_3)$ care maximizează $\mathbf{EG}(b, x)$ cu condiția

$$35x_1 + 20x_2 + 50x_3 \leqslant 3000.$$

Această problemă poate fi rezolvată tot prin metoda lui Lagrange pentru extreme legate. Avem

$$F(x, \lambda) = \mathbf{EG}(b, x) + \lambda(3000 - 35x_1 - 20x_2 - 50x_3).$$

Vectorul $x(x_1, x_2, x_3)$ care maximizează $\mathbf{EG}(b, x)$ și parametrul λ sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 = -(66 + 35\lambda) + 137\, \Phi\left(\frac{x_1 - 30}{8}\right); \quad \Phi\left(\frac{x_1 - 30}{8}\right) = \frac{66 + 35\lambda}{137}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 = -(37 + 20\lambda) + 77\, \Phi\left(\frac{x_2 - 60}{12}\right); \quad \Phi\left(\frac{x_2 - 60}{12}\right) = \frac{37 + 20\lambda}{77}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 = -(105 + 50\lambda) + 325\, \Phi\left(\frac{x_3 - 15}{3}\right); \quad \Phi\left(\frac{x_3 - 15}{3}\right) = \frac{21 + 10\lambda}{65}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 = 3000 - 35x_1 - 20x_2 - 50x_3.$$

Luînd pentru λ diferite valori avem

Scanned with OKEN Scanner

λ	x_1	x_2	x_3	$\sum_{j=1}^{3} c_j x_j$
0,1	29,8	59,8	16,2	5880
1	25	52	17	5359
2	6	24	14	2754

Soluția optimă este $x_1^* = 6$; $x_2^* = 24$; $x_3^* = 14$, suma necesară pentru comanda inițială fiind de \$ 2754. Se observă că, dacă suma de care dispune magazinul pentru aprovizionarea cu mărfuri ar fi de 5880 lei, comanda inițială ar fi apropiată de valoarea medie a cererii. Deoarece această sumă este mult mai mică comanda inițială nu poate asigura satisfacerea cererii medii decît la articolul M_3 pentru care costul unei comenzi ulterioare este cu mult mai mare decît al celei inițiale.

Dacă atît matricea A cît și vectorul b conțin elemente aleatoare programul liniar cu restricții aleatoare

$$\begin{gathered} Ax \geqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min cx \end{gathered} \tag{I.6.99}$$

poate fi rezolvat tot ca o problemă cu două stadii alegînd un program $x \geqslant 0$ înainte de a cunoaște matricea A și vectorul b. Presupunînd că pentru orice $x \geqslant 0$ și pentru toate valorile pe care le poate lua cuplul (A, b) există un vector $y \geqslant 0$ care satisface sistemul

$$Ax + Ty = b$$

se caută cea mai bună decizie pentru stadiul al doilea adică soluția programului

$$\begin{gathered} Ty = b - Ax \\ y \geqslant 0 \\ \min fy \end{gathered} \tag{I.6.100}$$

și se înlocuiește funcția obiectiv a problemei inițiale prin

$$\min \{cx + \mathbf{E} \min_y fy\}.$$

Dacă toate componentele vectorului f sînt infinite atunci problema admite soluții numai pentru vectorii $x \geqslant 0$ care satisfac sistemul

Scanned with OKEN Scanner

$Ax \geqslant b$ pentru toate valorile pe care le poate lua cuplul (A, b). Mulțimea $S = \bigcap\limits_{(A,b)} \{x | x \geqslant 0, Ax \geqslant b\}$ este denumită *mulțimea soluțiilor permanent realizabile* și problema (I.6.99) se rezolvă determinînd vectorul $x \in S$ care realizează minimul funcției cx. Acest mod de abordare comportă riscul de a conduce la concluzia că problema nu are soluții, deși a fost corect formulată, deoarece în astfel de cazuri S poate fi o mulțime vidă.

Prin definiție un vector nenegativ x este permanent realizabil dacă aparține intersecției polyhedrelor $Ax \geqslant b$ încît S este o mulțime convexă. Dacă numai vectorul b este aleator mulțimea S poate fi ușor descrisă. Fie b^+ vectorul b definit astfel: componenta $b_i^+, i = 1, \ldots, m$ a vectorului b^+ este supremu-ul componentelor de ordinul i al tuturor vectorilor b admisibili. Mulțimea vectorilor $x \geqslant 0$ care satisfac sistemul $Ax \geqslant b^+$ o notăm cu S^+. Vom arăta că $S^+ = S$. În primul rînd să observăm că, dacă există $b_i^+ = \infty$, atunci $S^+ = \emptyset$; dar în acest caz și $S = \emptyset$, deci $S = S^+$.

În continuare vom considera numai cazul cînd b este o variabilă aleatoare discretă. Extinderea la cazul continuu nu comportă modificări însemnate.

Fie $b^1(b_1^1, \ldots, b_m^1)$, $b^2(b_1^2, \ldots, b_m^2), \ldots, b^r(b_1^r, \ldots, b_m^r)$ valorile admisibile ale vectorului aleator b și b^+ vectorul cu componentele $b_i^+ = \max\ b_i^k$, $k = 1, \ldots, r$. Dacă se notează cu α^i, $i = 1, \ldots, m$ liniile matricei A, sistemul $Ax \geqslant b$ poate fi scris sub forma

$$\alpha^i x \geqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

vectorul $x \geqslant 0$ este permanent realizabil sau, altfel spus, aparține mulțimii S dacă satisface sistemele de inecuații:

$$\begin{aligned} &\alpha^i x \geqslant b_i^1 && i = 1, \ldots, m \\ &\alpha^i x \geqslant b_i^2 && i = 1, \ldots, m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha^i x \geqslant b_i^r && i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{I.6.101}$$

Este evident că orice $x \in S^+$ satisface (I.6.101) încît $S \supset S^+$. Reciproc, dacă x satisface sistemul (I.6.101) atunci $\alpha^i x \geqslant b_i^k$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, r$ și deci

$$\alpha^i x \geqslant b_i^+ \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{I.6.102}$$

De aici rezultă $S \subset S^+$ și prin urmare $S = S^+$. Dacă (A, b) este aleator și ia $k = 1, \ldots, r$ valori, $x \in S$ dacă este nenegativ și satisface sistemul

$$A^k x \geqslant b^k, \qquad k = 1, \ldots, r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia programului stochastic $\{\min cx | x \in S\}$ este atunci soluţia programului liniar deterministic

$$\begin{gathered} Ax^k \geqslant b^k \\ x \geqslant 0 \quad k = 1, \ldots, r \\ \min cx \end{gathered} \tag{I.6.103}$$

care conţine $m \times r$ restricţii şi n variabile. Dacă r este un număr mare rezolvarea problemei (I.6.103) devine dificilă încît este util să demonstrăm :

Teorema IX. Dacă $x \in S$ realizează minimul funcţiei cx pentru o valoare particulară a cuplului (A, b) şi dacă (A, b) ia un număr finit de valori, atunci x este soluţia optimă a problemei

$$\{\min cx | x \in S\}.$$

Demonstraţie. Pentru a simplifica expunerea să admitem că (A, b) ia valorile (A_1, b_1) (A_2, b_2) şi (A_3, b_3) şi că soluţia optimă a problemei

$$\begin{gathered} A_1 x - I\eta_1 = b_1 \\ x \geqslant 0, \ \eta_1 \geqslant 0 \\ \min \ cx \end{gathered} \tag{I.6.104}$$

(I matricea unitate de ordinul m), este vectorul $X(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \eta_{1j_{s+1}}, \ldots, \eta_{1j_m})$. Fie $B(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}, -e_{j_{s+1}}, \ldots, e_{j_m})$ baza corespunzătoare soluţiei optime. Vectorii $e_{j_{s+1}}$ au toate componentele nule cu excepţia componentei de ordinul j_{s+1} care este egală cu 1. Vectorul c_B are s componente nenule şi egale cu $c_{j_1}, \ldots, c_{j_s}$ şi $m - s$ componente nule. Este evident că $s \leqslant m$ deoarece soluţia optimă este o soluţie de bază. Deoarece X este optimal, baza B corespunde unei soluţii dual realizabile încît diferenţele $z_j - c_j$ sînt nepozitive pentru toţi vectorii care nu aparţin bazei. Astfel :

$$\begin{gathered} \text{pentru } a_{j_k} \notin B : z_j - c_j = c_B B^{-1} a_{j_k} - c_{j_k} \leqslant 0 \\ \text{pentru } e_{j_l} \notin B : z_j - c_j = - c_B B^{-1} e_{j_l} \leqslant 0. \end{gathered} \tag{I.6.105}$$

Dacă vectorul $x^*(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ aparţine mulţimii S, va satisface şi inecuaţiile

$$A_2 x \geqslant b_2 ; \quad A_3 x \geqslant b_3. \tag{I.6.106}$$

Fără a micşora generalitatea demonstraţiei putem admite că toate relaţiile (I.6.106) sînt verificate de x^* cu semnul „$>$“. Fie $\eta_2 > 0$ şi $\eta_3 > 0$ vectorii pentru care avem

$$A_2 x^* - I\eta_2 = b_2 ; \quad A_3 x^* - I\eta_3 = b_3$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul $X(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \eta_{1j_{s+1}}, \ldots, \eta_{1j_m}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{2m}, \eta_{31}, \ldots, \eta_{3m})$ este o soluţie realizabilă de bază pentru sistemul

$$\begin{aligned} A_1x - \mathrm{I}\eta_1 &= b_1 \\ A_2x \quad - \mathrm{I}\eta_2 &= b_2 \\ A_3x \quad - \mathrm{I}\eta_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}.6.107)$$

$$x \geqslant 0,\ \eta_1 \geqslant 0,\ \eta_2 \geqslant 0,\ \eta_3 \geqslant 0.$$

Vom dovedi că X realizează minimul funcţiei cx pe mulţimea soluţiilor sistemului (I.6.107) deci pentru $x \in S$.

Fie $\widetilde{B}$ baza asociată vectorului X. Dacă se notează cu C submatricea matricei $\begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$ formată din coloanele $j_1, \ldots, j_s$ şi cu $I^{(2m)}$ matricea unitate de ordinul $2m$ putem scrie

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & -I^{(2m)} \end{bmatrix}.$$

E uşor de văzut că

$$\widetilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ CB^{-1} & -I^{(2m)} \end{bmatrix}.$$

X este optimal dacă toţi $z_j - c_j$, corespunzători vectorilor care nu aparţin bazei $\widetilde{B}$ sînt nepozitivi. Fie $\widetilde{A}$ matricea sistemului (I.6.106)

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & -I^{(m)} & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & -I^{(m)} & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & -I^{(m)} \end{bmatrix}$$

Vectorii din $\widetilde{A}$ care nu aparţin bazei $\widetilde{B}$ sînt:

vectorii $\tilde{a}_{j_k}$ obţinuţi completînd vectorii $a_{j_k} \notin B$ cu elementele corespunzătoare din A_2 şi A_3;

vectorii $-\tilde{e}_{j_l}$ obţinuţi completînd vectorii $-e_{j_l} \notin B$ cu $2m$ elemente nule.

Pentru $\tilde{a}_{j_k} \in \widetilde{B}$, $z_j - c_j = c_{\widetilde{B}}\, \widetilde{B}^{-1}\, \tilde{a}_{j_k} - c_{j_k}$

$$B^{-1}\, \tilde{a}_{j_k} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ CB^{-1} & -I^{(2m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j_k} \\ \tilde{a}_{j_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}a_{j_k} \\ CB^{-1}a_{j_k} - I^{(2m)}\, \tilde{a}_{j_k} \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $c_{\widetilde{B}} = (c_B, 0)$ urmează că $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_{j_k} - c_{j_k}$ care este o diferență nepozitivă în baza primei condiții din (I.6.105).

Pentru $\widetilde{e}_{j_l} \notin \widetilde{B}$, se dovedește asemănător că $z_j - c_j = -c_B B^{-1} e_{j_l} \leqslant 0$

Corolar. Dacă x^* este soluția problemei deterministice

$$(\mathbf{E}A)x \geqslant \mathbf{E}b$$

$$x \geqslant 0$$

$$\min cx$$

atunci x^* este soluția programului stochastic $\{\min cx \mid x \in S\}$ dacă $x^* \in S$ și dacă $(\mathbf{E}A, \mathbf{E}b)$ este o valoare a cuplului (A, b). Dacă $x^* \in S$ dar $(\mathbf{E}A, \mathbf{E}b)$ nu este un (A, b) admisibil, x^* nu este necesar optimal.

Exemplul VI. Să verificăm teorema precedentă pe exemplul următor:

Fie dată problema

$$Ax \geqslant b$$

$$x \geqslant 0$$

$$\min cx$$

în care $c = (1, 1, 1)$ iar (A, b) ia valorile (A^1, b^1), (A^2, b^2) și (A^3, b^3) cu

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad b^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix}; \quad b^2 = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1{,}8 & 0{,}2 \\ 3{,}5 & 1 & 1{,}5 \end{bmatrix}; \quad b^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5{,}5 \end{bmatrix}$$

Soluția problemei $A^1 x \geqslant b^1$, $x \geqslant 0$, $\min cx$ scrisă sub forma

$$x_1 + 2x_2 \qquad - \zeta_2 \qquad = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \qquad - \zeta_3 = 5$$

$$x \geqslant 0, \quad \zeta \geqslant 0$$

$$\min(x_1 + x_2 + x_3)$$

este $x_1 = {}^6/_5$; $x_2 = {}^7/_5$; $x_3 = 0$; $\zeta_1 = 0$; $\zeta_2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemele $A^2x \geqslant b^2$, $A^3x \geqslant b^3$ scrise sub forma

$$\begin{aligned} 1{,}5x_1 + \quad 2x_2 + 0{,}5x_3 - \zeta_3 &= 4{,}2 \\ 3x_1 + 1{,}5x_2 + \quad x_3 - \zeta_4 &= 5 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}8x_2 + 0{,}2x_3 - \zeta_5 &= 3 \\ 3{,}5x_1 + \quad x_2 + 1{,}5x_3 - \zeta_6 &= 5{,}5 \end{aligned}$$

sînt satisfăcute de $x^*(^6/_5,\ ^7/_5,\ 0)$ pentru $\zeta_3 = 0{,}4$; $\zeta_4 = 0{,}7$; $\zeta_5 = 0{,}48$; $\zeta_6 = 0{,}1$ încît $x^* \in S$. Trebuie să verificăm că x^* realizează $\min(x_1 + x_2 + x_3)$ pentru $x \in S$. $\tilde{B}$ este format din vectorii asociaţi variabilelor $x_1, x_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$.

Deoarece avem:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 3 & 1{,}5 \\ 0{,}8 & 1{,}8 \\ 3{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

se poate obţine

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -^1/_5 & ^2/_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ^3/_5 & -^1/_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ^{4{,}5}/_5 & ^1/_5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ ^{1{,}5}/_5 & ^{4{,}5}/_5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ ^{4{,}6}/_5 & -^{0{,}2}/_5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -^{0{,}5}/_5 & ^6/_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\tilde{B}$ este baza asociată soluţiei optime dacă diferenţele $z_j - c_j$ pentru $\tilde{a}_3$, ζ_1 şi ζ_2 sînt nepozitive:

$$\tilde{a}_3 = (0;\ 1;\ 0{,}5;\ 1;\ 0{,}2;\ 1{,}5);$$

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{a}_3 = (^2/_5;\ -^1/_5;\ -^{1{,}5}/_5;\ -^{0{,}5}/_5;\ -^{1{,}2}/_5;\ -^{0{,}5}/_5)$$

iar $c_{\tilde{B}} = (1,1,0,0,0,0)$ încît $c_{\tilde{B}}\tilde{B}^{-1}\tilde{a}_3 - c_3 = ^1/_5 - 1 = -^4/_5$

$$\tilde{\zeta}_1 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{\zeta}_1 = (^1/_5;\ -^3/_5;\ -^{4{,}5}/_5;\ -^{1{,}5}/_5;\ -^{4{,}6}/_5;\ ^{0{,}5}/_5)$$

Scanned with OKEN Scanner

și $c_{\widetilde{B}}\widetilde{B}^{-1}\widetilde{\zeta}_1 = -{}^2/_5$

$$\widetilde{\zeta}_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 0);$$

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{\zeta}_2 = (-{}^2/_5;\ {}^1/_5;\ -{}^1/_5;\ -{}^{4,5}/_5;\ {}^{0,2}/_5;\ -{}^6/_5)$$

și $c_{\widetilde{B}}\widetilde{B}^{-1}\widetilde{\zeta}_2 = -{}^1/_5$

În concluzie, x^* este soluția optimă pentru $\{\min cx \mid x \in S\}$.

§ 7. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE ÎN CARE TOȚI COEFICIENȚII SÎNT ALEATORI

Într-o problemă de programare liniară, coeficienții modelului se grupează în trei categorii distincte:

— elementele matricei tehnologice $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$;

— componentele vectorului cerere $b = (b_i)$, $i = 1, \ldots, m$;

— componentele vectorului costurilor sau beneficiilor $c = (c_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

În practică se pot prezenta cazuri în care toți coeficienții modelului sînt variabile aleatoare. De exemplu, să admitem că ne preocupă problema planificării producției de legume într-o anumită regiune. Dacă se notează prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cantitățile care trebuie obținute din n sorturi de legume ce se pot cultiva în regiunea considerată, vectorul $x(x_1, \ldots, x_n)$ reprezintă un plan de culturi sau, altfel spus, un program de activitate. Să presupunem că planul este considerat optim dacă beneficiul global obținut din vînzarea legumelor este maxim. Producția la hectar, suma de bani care trebuie investită pentru cultivarea unui hectar, precum și cantitatea de muncă, măsurată în ore, necesară pentru a obține o tonă din fiecare sort de legume sînt variabile aleatoare. Experiența anilor precedenți poate fi folosită pentru calculul valorilor medii ale acestor mărimi și, eventual, pentru a cunoaște distribuția de probabilitate a matricei tehnologice formată de acești coeficienți. Se mai poate admite că cererea pentru fiecare sort de legume este aleatoare presupunînd că aceste legume pot fi solicitate de fabricile de conserve a căror plan de producție nu este cunoscut în momentul în care se face planul de cultură. De asemenea este logic ca beneficiile realizabile să fie privite ca variabile aleatoare. În aceste condiții problema propusă se formulează ca un program stochastic în care a_{ij}, b_i

Scanned with OKEN Scanner

și c_j; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ sînt variabile aleatoare. Se poate admite că se cunoaşte distribuţia mixtă de probabilitate a tripletului (A, b, c) pe care o vom nota cu

$$\mathbf{P}(A, b, c). \tag{I.7.1}$$

Ce se va urmări în aceste cazuri, prin rezolvarea modelului

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ z = \max cx? \end{gathered} \tag{I.7.2}$$

Un scop care ar putea fi urmărit ar fi determinarea valorii medii a beneficiului maxim realizabil. Această informaţie, utilă în unele împrejurări, nu va oferi însă şi un program de activitate adică, în cazul exemplului nostru, un plan de culturi. Pe de altă parte se poate pune întrebarea: care este probabilitatea de a obţine valoarea medie a beneficiului? Alteori planificatorul poate fi interesat să cunoască valoarea cea mai probabilă a beneficiului. Pentru a găsi răspunsul la aceste întrebări trebuie cunoscută distribuţia variabilei aleatoare

$$z = \{\max cx | Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\}$$

în ipoteza că se cunoaşte $\mathbf{P}(A, b, c)$. Din considerentele anterioare se desprind două direcţii de cercetare constînd din

— problema determinării valorii medii a variabilei aleatoare z;

— problema determinării distribuţiei optimului z al programului stochastic.

Valori medii ale optimului funcţiei economice

În abordarea acestei probleme literatura de specialitate indică două căi: politica de aşteptare sau politica pasivă şi politica activă.

Politica de aşteptare sau *politica pasivă* presupune că cel care ia hotărîrile aşteaptă ca „natura" să precizeze valorile variabilelor aleatoare şi apoi rezolvă problema. Dacă experienţa se repetă în aceleaşi condiţii se constituie un eşantion format din observaţii ale tripletului (A, b, c). Fie $(A, b, c)_k$, $k = 1, \ldots, r$ valorile observate. Problema (I.7.2) în care se atribuie tripletului (A, b, c) valoarea $(A, b, c)_k$ este o problemă de programare liniară deterministică. În ipoteza că modelul (I.7.2) are optim finit pentru orice $(A, b, c)_k$ $k = 1, 2, \ldots, r$ fie

$$z^{(k)} = \{\max c^{(k)} x | A^{(k)} x \leqslant b^{(k)}, \ x \geqslant 0\}. \tag{I.7.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă tripletul (A, b, c) poate lua un număr finit r, de valori şi se cunosc probabilităţile p_k,

$$p_k = \mathbf{P}[(A, b, c) = (A, b, c)_k], \quad k = 1, \ldots, r$$

se poate calcula

$$\mathbf{E}\, z = \sum_{k=1}^{r} p_k z^{(k)}. \tag{I.7.4}$$

Desigur că acest mod de rezolvare a problemei poate da naştere la multe discuţii în legătură cu modul de formare a eşantionului, mărimea eşantionului, estimaţii etc.

Politica activă conduce la o problemă cu două stadii. Această politică implică alegerea unui program de activitate x^0, căruia i se impune numai condiţia de nenegativitate, înainte de a cunoaşte valorile pe care le iau A, b şi c. Desigur că, în cele mai multe cazuri, x^0 nu va satisface sistemul

$$Ax \leqslant b$$

pentru valorile A, b observate după alegerea programului dar se admite că nepotrivirile dintre Ax^0 şi b pot fi compensate printr-o nouă decizie y. Asociind vectorului y un vector al „costurilor" f, funcţia economică cx se înlocuieşte prin

$$C(x^0, y) = cx^0 + fy.$$

Cele două stadii ale problemei constau în alegerea programelor x^0 şi y. Vectorul y poate avea unele componente negative, altele pozitive şi altele nule deoarece pentru A, b determinaţi putem avea

$$\begin{aligned} &\alpha^i x^0 > b_i && i = 1, \ldots, p \\ &\alpha^i x^0 < b_i && i = p+1, \ldots, s \\ &\alpha^i x^0 = b_i && i = s+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Scriind sistemul $Ax \leqslant b$ sub forma

$$Ax + Dy = b \tag{I.7.5}$$

unde D este o matrice $m \times m$ cu elementele

$$\begin{aligned} &d_{ij} = 0 && \text{pentru } i \neq j \\ &d_{ij} = 1, \ -1 \text{ sau } 0 && \text{pentru } i = j \end{aligned}$$

vectorul y poate avea toate componentele pozitive. Se va alege acel y pentru care se obţine

$$\max_y C(x^0, y) = \{\max_y (cx^0 + fy) | Ax + Dy = b, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}. \tag{I.7.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\max_y C(x^0, y)$ este o funcţie concavă de a_{ij} şi b_i, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ atunci este evident că media unui număr de valori ale funcţiei

$$z = \max_x \mathbf{E} \max_y C(x^0, y) \tag{I.7.7}$$

calculate pentru diferite valori ale tripletului (A, b, c) nu poate fi mai mare decît

$$\bar{z} = \{\max(\mathbf{E}c)x | (\mathbf{E}A)x \leqslant (\mathbf{E}b), x \geqslant 0\} \tag{I.7.8}$$

unde $\mathbf{E}A$ este matricea ale cărei elemente sînt valorile medii ale elementelor matricei A; $\mathbf{E}b$ şi $\mathbf{E}c$ sînt vectorii ale căror componente sînt respectiv valorile medii ale componentelor vectorilor b şi c.
Se va demonstra

Teorema I. $\max_y C(x^0, y) = \{\max_y (cx^0 + fy) | Ax^0 + Dy = b, x^0 \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ este o funcţie concavă de a_{ij} şi b_i $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Demonstraţie. Se poate arăta că $\max_y C(x^0, y)$ este o funcţie concavă de a_{ij} şi b_i dovedind că

$$\max_{y_0} C(x^0, y) \geqslant \lambda \max_{y_1} C(x^0, y) + (1 - \lambda) \max_{y_2} C(x^0, y) \tag{I.7.9}$$

unde $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ şi

$$\max_{y_0} C(x^0, y) = \{\max_y (c^0 x^0 + fy) | A^0 x^0 + Dy = b^0, x^0 \geqslant 0, y \geqslant 0\} \tag{I.7.10}$$

$$\max_{y_1} C(x^0, y) = \{\max_y (c^0 x^0 + fy) | A^1 x^0 + Dy = b^1, x^0 \geqslant 0, y \geqslant 0\} \tag{I.7.11}$$

$$\max_{y_2} C(x^0, y) = \{\max_y (c^0 x^0 + fy) | A^2 x^0 + Dy = b^2, x^0 \geqslant 0, y \geqslant 0\} \tag{I.7.12}$$

$$A^0 = \lambda A^1 + (1-\lambda) A^2; \quad b^0 = \lambda b^1 + (1-\lambda) b^2; \quad c^0 = \lambda c^1 + (1-\lambda) c^2. \tag{I.7.13}$$

Fie y^1 şi y^2 soluţiile optime ale problemelor (I.7.11) şi (I.7.12). Vectorii y^1 şi y^2 satisfac restricţiile problemelor respective, deci

$$A^1 x^0 + Dy^1 = b^1 \tag{I.7.14}$$

$$A^2 x^0 + Dy^2 = b^2 \tag{I.7.15}$$

Înmulţind egalitatea (I.7.14) cu λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, şi egalitatea (I.7.15) cu $(1 - \lambda)$ şi adunînd produsele, avem

$$[\lambda A^1 + (1-\lambda) A^2] x^0 + D[\lambda y^1 + (1-\lambda) y^2] = \lambda b^1 + (1-\lambda) b^2 \tag{I.7.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de relațiile (I.7.13) și înlocuind vectorul $\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2$ prin y^0, egalitatea (I.7.16) se scrie sub forma

$$A^0x^0 + Dy^0 = b^0$$

care arată că vectorul nenegativ

$$y^0 = \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2$$

verifică sistemul de restricții al problemei (I.7.10). Funcția obiectiv a acestei probleme, pentru soluția realizabilă de bază y^0 ia valoarea

$$c^0x^0 + fy^0 = c^0x^0 + f[\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2] =$$
$$= \lambda(c^1x^0 + fy^1) + (1 - \lambda)(c^2x^0 + fy^2)$$

Vectorul y^0 nu este obligatoriu soluția optimă a problemei (I.7.10) încît

$$\max_y C(x^0, y) \geqslant c^0x^0 + fy^0$$

sau

$$\max_y C(x^0, y) \geqslant \lambda(c^1x^0 + fy^1) + (1 - \lambda)(c^2x^0 + fy^2). \quad \text{(I.7.17)}$$

Deoarece y^1 și y^2 sînt, prin definiție, soluțiile optime ale problemelor (I.7.11) și (I.7.12) inegalitatea (I.7.17) este identică cu (I.7.9) deci demonstrează teorema.

Probleme de distribuție

Determinarea distribuției optimului funcției obiectiv a unui program stochastic poate fi privită ca echivalentă cu determinarea distribuției optimului unei funcții liniare aleatoare, definită pe mulțimea soluțiilor aleatoare ale unui sistem de ecuații liniare. Plecînd de la această idee, M. Balbar [1] găsește o metodă de aproximare a unor proprietăți ale distribuției soluțiilor unui sistem de ecuații liniare de forma

$$(A + \alpha)x = b + \beta \quad \text{(I.7.18)}$$

în care A este o matrice $m \times n$ de rang m cu elemente constante și α este *matricea erorilor aleatoare* ale elementelor matricei A; b este un vector coloană cu m componente constante b_i, $i = 1, \ldots, m$, β fiind format din erorile aleatoare ale elementelor b_i. Se studiază apoi distribuția valorilor formei liniare $(c + \gamma)x$ pe mulțimea soluțiilor sistemului (I.7.18). În forma liniară $(c + \gamma)x$, c este un vector cu n ele-

Scanned with OKEN Scanner

mente constante c_j, $j = 1, \ldots, n$, γ fiind constituit din erorile aleatoare ale componentelor vectorului c. Rezultatele obținute sînt aplicate problemei de programare

$$\begin{gathered}(A + \alpha)x + (T + \tau)y \leqslant b + \beta \\ x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \\ z = \max\{(c + \gamma)x + (f + \varphi)y\}\end{gathered} \tag{I.7.19}$$

în care T și f sînt formate din elemente constante iar τ și φ sînt constituite din erorile aleatoare corespunzătoare acestora.

H. Wagner [51] recunoscînd valoarea procedeului de aproximare folosit de M. Balbar în analiza distribuției soluțiilor sistemului (I.7.18) face unele rezerve în ceea ce privește extinderea rezultatelor la studiul modelului (I.7.19). G. Tintner [46] propune o metodă de aproximare numerică a distribuțiilor lui x și z. Pentru aceasta se consideră o „colecție" de r valori pentru erorile coeficienților modelului (I.7.19) și se rezolvă modelul pentru fiecare mulțime specifică a acestor valori. Dacă admitem că există q coeficienți care pot avea erori aleatoare, se vor rezolva r^2 probleme de programare liniară deterministică obținute din (I.7.18) și apoi se aproximează prin metode numerice distribuțiile lui x și z. G. Tintner [47] revine asupra aceleiași probleme referindu-se la un model de forma (I.7.2) pentru care presupune că $\mathbf{P}(A, b, c)$ este cunoscut și propune o *metodă pasivă* și o metodă *activă* de rezolvare.

Metoda pasivă constă în a deduce distribuția funcției z, prin metode numerice dacă este necesar, presupunînd că pentru aproape toate valorile posibile ale tripletului (A, b, c) programele liniare deterministice obținute din (I.7.2) au maxim finit.

Metoda activă constă în alegerea proporțiilor în care se vor folosi resursele, înainte ca valorile elementelor aleatoare să fie cunoscute. Să notăm cu $U = [u_{ij}]$ o matrice $m \times n$ ale cărei elemente u_{ij} satisfac condițiile

$$u_{ij} \geqslant 0; \sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1.$$

O astfel de matrice, numită *matrice de alocație*, asigură o anumită distribuire a resurselor. Problema (I.7.2) se înlocuiește astfel prin

$$\begin{gathered}AX \leqslant BU \\ x \geqslant 0 \\ u_{ij} \geqslant 0 \\ \sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1 \\ z = \max cx\end{gathered} \tag{I.7.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care B şi X sînt matrice diagonale, avînd pe diagonală elementele vectorilor b, respectiv x; U este o matrice $m \times n$ cu elementele u_{ij}. Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare z depinde acum atît de $\mathbf{P}(A, b, c)$ cît şi de alegerea matricei de repartiţie U. În principiu se poate determina funcţia de repartiţie $F(z)$ a lui z pentru fiecare matrice de alocaţie U, admisibilă. Fie $F_{U_r}(z)$ şi $F_{U_t}(z)$ funcţiile $F(z)$ obţinute pentru matricele U_r şi U_t. Se poate stabili o ordine de preferinţă între $F_{U_r}(z)$ şi $F_{U_t}(z)$ dacă se alege o funcţională de preferinţă

$$\varphi = \varphi(F_U(z))$$

pe care o maximizăm în raport cu elementele matricei U. De exemplu, o astfel de funcţională poate fi valoarea medie a lui z

$$\mathbf{E}z = \int z d(F_U(z)).$$

Funcţionala de preferinţă numită şi *funcţie de utilitate* ne va arăta dacă alocarea U_r a resurselor este preferabilă sau nu alocării U_t. Pentru clarificarea ideilor vom reproduce exemplul de aplicare a metodelor pasivă şi activă dat de G. Tintner [48].

Exemplul I. O întreprindere agricolă dispune de $b_1 = 148$ unităţi de teren care poate fi folosit pentru culturile K_1 şi K_2. Suma de bani care poate fi cheltuită în acest scop este $b_2 = 1800$ unităţi monetare. Fie x_1, x_2 cantităţile de produse care trebuie obţinute din culturile K_1, K_2 pentru ca beneficiul net

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad \text{(I.7.21)}$$

să fie maxim. Se ştie că $c_1 = 1{,}56$ şi $c_2 = 3{,}81$. Inversele productivităţii pe unitatea de teren pentru fiecare cultură, $a_{1,1}$ şi $a_{1,2}$ cît şi sumele care trebuie investite, $a_{2,1}$ şi $a_{2,2}$, în scopul obţinerii recoltei sînt variabile aleatoare independente, normal distribuite, avînd mediile şi abaterile standard din tabelul 20.

(20)

Variabila	Media $\bar{a}_{ij}$	Abaterea standard σ_{ij}
$a_{1,1}$	0,022740	0,0065205
$a_{1,2}$	0,092440	0,0256583
$a_{2,1}$	0,317720	0,0853977
$a_{2,2}$	0,969500	0,4338177

Scanned with OKEN Scanner

Restricţiile problemei sînt

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &\leqslant b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &\leqslant b_1 \\ x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{I.7.22}$$

Soluţia modelului deterministic obţinut atribuind coeficienţilor valorile lor medii este $x_1 = 5668,\ 475$; $x_2 = 0$ iar beneficiul corespunzător este $z = 8842,\ 821$.

Metoda pasivă. Se determină o aproximaţie a funcţiei de repartiţie $F(z)$ prin metode numerice înlocuind variabilele aleatoare normale $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ şi $a_{2,2}$ prin variabilele standardizate corespunzătoare şi rezolvînd problemele deterministice care se obţin pentru valorile 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2 şi $\pm$ 3. Dacă se reţin numai termenii liniari din dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei economice se obţine o aproximare a distribuţiei beneficiilor cu valoarea medie 11081 şi abaterea standard 7608, încît, $x_1 = 1095$ şi $x_2 = 733$. Această soluţie nu este considerată satisfăcătoare deoarece diferă mult de soluţia programului iniţial.

Metoda activă. Fie

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

matricea de alocaţie folosită în problema (I.7.21) — (I.7.22). În acest exemplu u_{11} reprezintă proporţia în care suprafaţa $b_1 = 148$ va fi folosită pentru cultura K_1 iar u_{12} proporţia în care această suprafaţă se foloseşte pentru cultura K_2 ; u_{21} şi u_{22} sînt proporţiile în care suma $b_2 = 1\,800$ unităţi băneşti este cheltuită pentru cele două culturi. Modelul problemei (I.7.21) — (I.7.22) pentru metoda activă este: să se maximizeze funcţia

$$z = 1{,}56x_1 + 3{,}81x_2$$

cu condiţiile

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 148 & 0 \\ 0 & 1800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \tag{I.7.23}$$

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} = 1\ ; \qquad u_{21} + u_{22} = 1 \\ 0 \leqslant u_{ij} \leqslant 1\ ; \qquad i, j = 1,\ 2 \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,\ 2. \end{aligned} \tag{I.7.24}$$

Egalităţile $u_{11} + u_{12} = 1$; $u_{21} + u_{22} = 1$ arată că resursele de teren şi bani sînt folosite în întregime, oricare ar fi proporţiile în care sînt

Scanned with OKEN Scanner

repartizate între cele două culturi. Restricţiile (I.7.23) scrise sub forma algebrică sînt:

$$a_{11}x_1 \leqslant 148u_{11}; \quad a_{21}x_1 \leqslant 1800u_{21}$$
$$a_{12}x_2 \leqslant 148u_{12}; \quad a_{22}x_2 \leqslant 1800u_{22}$$

sau:

$$(i)\ \frac{x_1}{148} \leqslant \frac{u_{11}}{a_{11}}; \qquad (ii)\ \frac{x_1}{1\,800} \leqslant \frac{u_{21}}{a_{21}}$$
$$(j)\ \frac{x_2}{148} \leqslant \frac{u_{12}}{a_{12}}; \qquad (jj)\ \frac{x_2}{1\,800} \leqslant \frac{u_{22}}{a_{22}}.$$

Putem face următoarele ipoteze:

$$(i) \leqslant (ii) \quad \text{şi} \quad (j) \leqslant (jj); \quad z = \frac{1{,}56 \times 148}{a_{11}} + \frac{3{,}81 \times 1\,800}{a_{21}}$$
$$(i) \leqslant (ii) \quad \text{şi} \quad (j) \geqslant (jj); \quad z = \frac{1{,}56 \times 148}{a_{11}} + \frac{3{,}81 \times 1\,800}{a_{22}}$$
$$(i) \geqslant (ii) \quad \text{şi} \quad (j) \leqslant (jj); \quad z = \frac{1{,}56 \times 148}{a_{12}} + \frac{3{,}81 \times 1\,800}{a_{21}}$$
$$(i) \geqslant (ii) \quad \text{şi} \quad (j) \geqslant (jj); \quad z = \frac{1{,}56 \times 148}{a_{12}} + \frac{3{,}81 \times 180}{a_{22}}.$$

Înlocuim variabilele aleatoare a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} prin variabilele corespunzătoare standardizate şi folosim numai valorile 0, ± 1, ± 2, ± 3 luînd pentru variabilele u_{ij} numai valorile 0, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$, 1 şi obţinem astfel o aproximare a distribuţiilor lui z din care se calculează valorile medii ale distribuţiilor. Rezultatele găsite sînt cuprinse în tabelul 21. Dacă, de exemplu, s-ar folosi pentru cultura K_1 75% din terenul existent şi 50% din suma de bani disponibilă, atunci avem $u_{11} = 0{,}75$ şi $u_{21} = 0{,}50$.

Din tabelul 21 se citeşte că, în acest caz, valoarea medie a beneficiului este 6 799 unităţi băneşti. Dacă se foloseşte tot terenul şi întreaga sumă de bani pentru cultura K_1, adică dacă $u_{11} = 1$ şi $u_{21} = 1$ se realizează cel mai mare beneficiu mediu, 8472 unităţi băneşti. O altă politică ar putea fi de a considera că soluţia optimă este aceea care asigură obţinerea beneficiului cu o probabilitate de 95%. Din tabelul 22 în care sînt înregistrate valorile beneficiilor medii corespunzătoare intervalului de încredere de 5% pentru diferite valori atribuite parametrilor u_{11} şi u_{21} rezultă că cel mai mare beneficiu care se poate asigura cu o probabilitate de 95% este de 5749 unităţi

Scanned with OKEN Scanner

(21)

u_{21} \ u_{11}	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	5 704	5 315	5 168	2 073	0
0,25	5 059	6 394	5 981	4 586	2 537
0,50	4 082	6 027	7 008	*6 799*	4 945
0,75	2 539	4 779	6 713	7 584	6 925
1,00	0	2 973	5 075	7 272	8 472

(22)

u_{21} \ u_{11}	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	3 437	3 199	2 132	1 067	0
0,25	3 000	4 413	3 608	2 660	1 559
0,50	2 094	3 898	5 133	4 098	3 119
0,75	1 049	2 806	4 419	5 505	4 676
1,00	0	1 465	2 928	4 361	5 749

bănești și corespunde valorilor $u_{11} = u_{21} = 1$ atribuite elementelor matricei U. Pentru ambele funcții de utilitate matricea optimă de alocație este

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema distribuțiilor valorilor optime ale funcției economice a unui program stochastic a constituit o preocupare și pentru A. Prékopa [39] care ajunge la concluzia că variabila aleatoare

$$z = \{\max cx | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

are o distribuție asimptotic normală ai cărei parametri pot fi determinați prin rezolvarea unor probleme deterministice.

Condițiile în care se ajunge la acest rezultat sînt:

(*i*) A, b și c sînt reciproc independenți din punct de vedere statistic;

(*ii*) toate matricele A admisibile sînt nedegenerate;

(*iii*) *indicii vectorilor coloană care formează baza optimală rămîn aceiași pentru toate problemele deterministice obținute atribuind tripletului* (A, b, c) *oricare dintre valorile admisibile.*

Condiția (*iii*) este esențială în stabilirea rezultatului anunțat. În primul rînd vom preciza conținutul acestei condiții.

Să admitem că tripletul (A, b, c) poate lua valorile $(A, b, c)_r$, $r \in I_0 = \{1, 2, \ldots, R\}$ și că baza optimă a problemei

$$\{\max c^s x \mid A^s x \leqslant b^s,\ x \geqslant 0,\ s \in I_0\}$$

este formată din primii m vectori ai matricei A^s. Prin (*iii*) se cere ca baza optimă a tuturor problemelor

$$\{\max c^r x \mid A^r x \leqslant b^r,\ x \geqslant 0,\ r \in I_0\}$$

să fie formată tot din primii m vectori ai matricelor corespunzătoare.

Dacă este satisfăcută condiția (*iii*) problema maximizării funcției cx cu condițiile $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ este echivalentă cu

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k = b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ x \geqslant 0 \qquad\qquad (I.7.25) \\ z = \max \sum_{k=1}^{m} c_k x_k. \end{gathered}$$

Se presupune că abaterile standard σ_{ik}, t_i și s_k ale variabilelor aleatoare a_{ik}, b_i și c_k pentru i și $k = 1, \ldots, m$ sînt finite.

Făcînd abstracție de natura aleatoare a coeficienților modelului (I.7.25) se caută dezvoltarea în serie Taylor a funcției z în vecinătatea valorii $\bar{z}$ definită prin

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{ik} x_k = \bar{b}_i;\ \ i = 1, \ldots, m \\ x \geqslant 0 \qquad\qquad (I.7.26) \\ \bar{z} = \max \sum_{k=1}^{m} \bar{c}_k x_k \end{gathered}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\bar{a}_{ik} = \mathbf{E}(a_{ik})$; $\bar{b}_i = \mathbf{E}(b_i)$; $\bar{c}_k = \mathbf{E}(\bar{c}_k)$ pentru i și $k = 1, \ldots, m$. În fond sistemul de restricții din (I.7.25) admite o soluție unică. Pentru a simplifica notația, fie R inversa matricei $B = \|a_{ik}\|$ $i,k = 1, \ldots, m$ și $\bar{R}$ inversa matricei $\bar{B} = \|\bar{a}_{ik}\|$, $i, k = 1, \ldots, m$. Cu aceste notații, soluțiile sistemelor (I.7.25) și (I.7.26) se scriu $x = Rb$ și $\bar{x} = \bar{R}\bar{b}$ încît $z = cRb$ și $\bar{z} = \bar{c}\bar{R}\bar{b}$.

z este o funcție continuă de a_{ik}, b_i și c_k și admite derivate parțiale de ordinul I și II în raport cu fiecare dintre aceste variabile. Pentru a calcula derivatele funcției z în raport cu a_{ik} se reamintește următoarea proprietate a inversei unei matrice:

Fie B o matrice a cărei inversă se notează cu R. Dacă elementul a_{ik} al matricei B se înlocuiește prin $a_{ik} + \alpha$, inversa matricei modificate este

$$R - \frac{\alpha}{1 + r_{ki}\alpha} r_i r^k \tag{I.7.27}$$

unde r_i este vectorul coloană de indice i din R și r^k este vectorul linie de indice k din R.

Notînd cu $z(a_{ik})$ valoarea funcției obiectiv din (I.7.25) și cu $z(a_{ik} + \alpha)$ valoarea pe care o ia această funcție cînd coeficientul a_{ik} variază cu α, în baza formulei (I.7.27) avem

$$z(a_{ik} + \alpha) = c\left(R - \frac{\alpha}{1 + r_{ki}\alpha} r_i r^k\right) b = cRb - \frac{\alpha}{1 + r_{ki}\alpha} c r_i r^k b =$$

$$= z(a_{ik}) - \frac{\alpha}{1 + r_{ki}\alpha} \sum_{j=1}^{m} c_j r_{ji} \sum_{i=1}^{m} r_{ki} b_i. \tag{I.7.28}$$

Se știe că produsul liniei k din inversa matricei B, prin vectorul b este componenta de ordin k a soluției, adică x_k.

Produsul vectorului linie c prin vectorul coloană r_i din inversa bazei, în tabelele simplex s-a notat de obicei cu z_i. De data aceasta, pentru a nu da loc la confuzii, vom nota acest produs cu y_i. Cu aceste notații, egalitatea (I.7.28) devine

$$z(a_{ik} + \alpha) - z(a_{ik}) = -\frac{\alpha}{1 + r_{ki}\alpha} y_i x_k \tag{I.7.29}$$

de aici rezultă că

$$\frac{\partial z}{\partial a_{ik}} = -x_k y_i. \tag{I.7.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din $z = cRb = \sum_{k=1}^{m} c_k x_k$ rezultă că

$$\frac{\partial z}{\partial c_j} = x_j \tag{I.7.31}$$

Scriind apoi $z = cRb = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{m} r_{jk} b_k$ avem

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{m} c_j r_{ji} = y_i. \tag{I.7.32}$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul II vom considera că elementul a_{ik} din B se înlocuiește prin $a_{ik} - \alpha$ și atunci

$$z(a_{ik} - \alpha) - z(a_{ik}) = \frac{\alpha}{1 - r_{ki}\alpha} y_i x_k. \tag{I.7.33}$$

Din (I.7.29) și (I.7.33) avem

$$z(a_{ik} + \alpha) + z(a_{ik} - \alpha) - 2z(a_{ik}) = 2\alpha^2 \frac{r_{ki}}{1 - \alpha^2 r_{ki}^2} y_i x_k$$

deci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 a_{ik}} = 2 r_{ki} x_k y_i. \tag{I.7.34}$$

În mod analog se deduc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a_{ik} \partial a_{pq}} = x_k y_p r_{qi} + x_q y_i r_{kp} \quad \text{pentru } |i - p| + |k - q| > 0 \tag{I.7.35}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a_{ik} \partial c_j} = - x_k r_{ji} \tag{I.7.36}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a_{ik} \partial b_j} = - y_i r_{kj} \tag{I.7.37}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial c_i \partial b_j} = r_{ij} \tag{I.7.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă luăm $\alpha_{ik} = a_{ik} - \bar{a}_{ik}$; $\beta_i = b_i - \bar{b}_i$; $\gamma_k = c_k - \bar{c}_k$ dezvoltarea funcției z în serie Taylor este

$$z = \bar{z} - \sum_{i,k=1}^{m} \bar{y}_i \alpha_{ik} \bar{x}_k + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \gamma_i + \sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k \beta_k + \sum_{i,k=1}^{m} y_i \alpha_{ik}^2 r_{ki} x_k -$$

$$- \sum_{i,k,j=1}^{m} (y_i r_{kj} \alpha_{ik} \beta_j + x_k r_{ji} \alpha_{ik} \gamma_j) + \sum_{|i-p|+|k-q|>0} (x_k y_p r_{qi} + x_q y_i r_{kp}) \alpha_{ik} \alpha_{pq}$$

sau folosind notația matriceală

$$z - \bar{z} = - \bar{y}' \mathcal{B} \bar{x} + \bar{y}' \gamma + \bar{x} \beta + \rho \qquad \text{(I.7.39)}$$

unde $\mathcal{B} = B - \bar{B}$; $\gamma = c - \bar{c}$; $\beta = b - \bar{b}$; y' este transpusul vectorului y și

$$\rho = - \frac{3}{2} x' \mathcal{B}_2 y + 2y' \mathcal{B} R \mathcal{B} x + \gamma' R \mathcal{B} x + y' \mathcal{B} R \beta \qquad \text{(I.7.40)}$$

cu $\mathcal{B}_2 = ||\alpha_{ik}^2 r_{ki}||$ $i, k = 1, \ldots, m$ iar x, y și R sînt luați în punctul

$$(\bar{b}_i + \delta\beta_i, \quad \bar{c}_i + \delta\gamma_i, \quad \bar{a}_{ij} + \delta\alpha_i, \quad 0 < \delta < 1).$$

Termenii principali din (I.7.39) au media egală cu zero și varianța

$$\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{m} \bar{x}_i \bar{y}_i D_{ik} \bar{y}' C y + \bar{x}' F x \qquad \text{(I.7.41)}$$

unde D_{ik} este matricea de covarianță a vectorilor coloană a_i și a_k

$$D_{ik} = \mathbf{E}[(a_i - \bar{a}_i)'(a_k - \bar{a}_k)]; \quad i, k = 1, \ldots, m$$

iar C și F sînt matricele de covarianță ale componentelor vectorilor c și b. Expresia lui σ^2 se simplifică dacă vectorii-coloană ai matricei B sînt statistic independenți sau dacă toate elementele din B, b și c sînt variabile aleatoare independente.

Lema 1. Fie $\{H_N\}$ un șir de evenimente cu proprietatea

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}(H_N) = 1$$

și η_N, ζ_N două șiruri de variabile aleatoare astfel încît η_N are o distribuție limită $G(x)$, iar ζ_N converge în probabilitate către 0. În aceste condiții, variabila aleatoare $\eta_N + \zeta_N$ pe $\{H_N\}$ are distribuția limită $G(x)$ adică:

dacă $\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}(\eta_N < x) = G(x)$ în orice punct de continuitate al funcției $G(x)$

și $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta_N| < \varepsilon) = 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$

atunci $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\eta_N + \zeta_N < x | H_N) = G(x)$ în orice punct de continuitate al funcției $G(x)$.

Demonstrația lemei este asemănătoare cu cea a teoremei de convergență Cramér [13, cap. 20]

Teorema III. Fie $f(u_1, \ldots, u_k)$ o funcție cu derivate continue de ordinul II într-o vecinătate convexă a punctului $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k)$. Se notează cu

$\nabla f(\overline{u})$ gradientul funcției f în punctul $\overline{u}$ și cu σ_N dispersia lui $\nabla f(u)$;

Ω matricea derivatelor de ordinul II ale funcției f într-un punct arbitrar din vecinătatea punctului $\overline{u}$.

Fie $(\alpha_1^{(N)}, \alpha_2^{(N)}, \ldots, \alpha_k^{(N)})$ un șir de vectori aleatori, cu $\mathbf{E}(\alpha_i^{(N)}) = 0$ $i = 1, \ldots, k$; $N = 1, 2, \ldots$ care satisfac condițiile

(*i*) $\alpha_i^{(N)}$, $i = 1, \ldots, k$ converge în probabilitate către zero;

(*ii*) variabila aleatoare $\frac{1}{\sigma_N} \nabla f(\overline{u}) \alpha^{(N)}$ are distribuția limită $G(x)$;

(*iii*) variabila aleatoare $\frac{1}{\sigma_N} (\alpha^{(N)})' \Omega \alpha^{(N)}$ converge în probabilitate către zero. Atunci, variabila aleatoare

$$\frac{1}{\sigma_N} \{f(\overline{u} + \alpha^{(N)}) - f(\overline{u})\}$$

are distribuția limită $G(x)$.

Demonstrație. Fie H_N evenimentul că punctul $\overline{u} + \alpha^{(N)}$ se găsește în vecinătatea punctului u în care funcția $f(u)$ are derivate continue de ordinul II. Atunci

$$\frac{1}{\sigma_N} \{f(\overline{u} + \alpha^{(N)}) - f(\overline{u})\} = \frac{1}{\sigma_N} \{\nabla f(\overline{u}) \alpha^{(N)} + \frac{1}{2} \alpha^{(N)'} \Omega \alpha^{(N)}\}. \quad \text{(I.7.42)}$$

În baza condiției (*i*), $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(H_N) = 1$ și în baza condiției (*iii*) al doilea termen din membrul drept converge în probabilitate către zero. Dacă notăm

$$\eta_N = \frac{1}{\sigma_N} \nabla f(\overline{u}) \alpha^{(N)} \quad \text{și} \quad \zeta_N = \frac{1}{\sigma_N} \alpha^{(N)'} \Omega \alpha^{(N)}$$

se observă că variabilele η_N și ζ_N satisfac condițiile lemei încît teorema rezultă ca o aplicare directă a lemei.

Teorema III. Fie $\sigma_{ik}^2 = \mathbf{E}(\alpha_{ik}^2)$, $s_i^2 = \mathbf{E}(\gamma_i^2)$ și $t_k^2 = \mathbf{E}(\beta_k^2)$, i, $k = 1, \ldots, m$; σ^2 dat de (I.7.41) și ρ dat de (I.7.40).

Dacă sînt îndeplinite condițiile

(*i*) $\sigma_{ik} \to 0$, $i, k = 1, \ldots, m$;

Scanned with OKEN Scanner

(*ii*) variabila aleatoare $\frac{1}{\sigma}\{-\bar{y}'\mathcal{B}\bar{x}+\bar{y}'\gamma+\bar{x}'\beta\}$ are o distribuție normală, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$ pentru $-\infty<x<+\infty$;

(*iii*) variabila $\frac{\rho}{\sigma}$ converge în probabilitate către zero; atunci, pentru orice x, variabila aleatoare

$$\frac{z-\bar{z}}{\sigma}$$

este asimptotic normală.

Demonstrație. Teorema III apare ca o consecință a teoremei anterioare. În adevăr variabila aleatoare

$$z=\left\{\max\sum_{k=1}^{m}c_kx_k\,\middle|\,\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_k=b_i,\ i=1,\ \ldots,\ m\ \ x\geqslant 0\right\}$$

este o funcție de m^2+2m variabile care sînt elementele a_{ij} ale matricei B și elementele b_i, c_k; $i,\ k=1,\ \ldots,\ m$ ale vectorilor b și c, încît $z(B, b, c)$ înlocuiește pe $f(u)$, punctul $\bar{u}$ se înlocuiește cu punctul $(\bar{B}, \bar{b}, \bar{c})$ din spațiul R^{m^2+2m} dimensional. Funcția z are dezvoltarea în serie Taylor, în vecinătatea punctului $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$ dată de (I.7.39). Condițiile teoremei II sînt înlocuite prin condițiile corespunzătoare din teorema III.

Rezultatele obținute pentru problema (I.7.25) sînt aplicabile și problemei de programare liniară stochastică

$$\begin{gathered}Ax\leqslant b\\ x\geqslant 0\\ \mu=\max cx.\end{gathered}\qquad\text{(I.7.43)}$$

În adevăr, dacă $\bar{B}$, matricea formată din valorile medii ale elementelor primilor m vectori coloană ai matricei A, este nedegenerată. atunci există o vecinătate a punctului $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$ din spațiul $R^{m\times n+m+n}$ dimensional în care vectorii din baza optimală păstrează aceiași indici.

Fie $\sigma_{max}=\max(\sigma_{ik},\ t_i,\ s_i;\ i=1,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ \ldots,\ m)$. Dacă pentru un șir $(A, b, c)_r$, $r=1, 2, \ldots$ admitem că

$$\sigma_{max}\to 0$$

Scanned with OKEN Scanner

probabilitatea ca $B(a_1, \ldots, a_m)$ să fie baza optimă a problemei (I.7.43) tinde la 1. Atunci, în baza lemei 1, variabila $\frac{\mu - \bar{\mu}}{\sigma}$ trebuie să aibă aceeaşi distribuţie limită, condiţionată sau necondiţionată, ca şi baza optimă. Dacă sînt îndeplinite condiţiile (*ii*) şi (*iii*) din teorema III, atunci este adevărată următoarea afirmaţie.

Teorema IV. Variabila aleatoare $\mu = \{\max cx | Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$ este asimptotic normală cu media $\bar{\mu} = \{\max \bar{c}\, x | \bar{A}x \leqslant \bar{b}, x \geqslant 0\}$ şi varianţa σ^2 dată de (I.7.41) în care $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ sînt soluţiile optime primală şi duală ale problemei (I.7.24) sau, ceea ce este echivalant,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mu - \bar{\mu}}{\sigma} < x\right) \to \Phi(x).$$

Subliniem faptul că parametrii distribuţiei se obţin rezolvînd o problemă de programare liniară deterministică.

O concluzie practică a rezultatelor obţinute de A. Prékopa este următoarea: presupunem că este dat un program aleator şi că dispunem de informaţii în legătură cu variaţia elementelor aleatoare. Admitem că se calculează valoarea optimă a programului pentru valori particulare ale tripletului (A, b, c). Ştiind că valoarea optimă a programului stochastic are o distribuţie asimptotic normală, se pot determina limite de încredere pentru valoarea calculată.

Considerînd modelele (I.7.2) şi (I.7.20) corespunzătoare abordării active şi pasive a unui program liniar stochastic, J. K. Sengupta, G. Tintner şi A. Millham [43] stabilesc unele relaţii între soluţiile optime ale acestor probleme.

Să presupunem că pentru toate valorile admisibile ale tripletului (A, b, c) problema (I.7.2) are soluţii realizabile de bază şi că valorile funcţiei obiectiv, pentru aceste soluţii, sînt finite. Fie $(A, b, c)_k$, $k \in \mathcal{K} = \{1, 2, \ldots, k\}$ mulţimea tripletelor (A, b, c) admisibile. Pentru un triplet dat, $(A, b, c)_k$, $k \in \mathcal{K}$, mulţimea soluţiilor realizabile de bază conţine cel mult C^m_{m+n} elemente. Fie $i \in I_1 = \{1, 2, \ldots i_k\}$ indicii bazelor realizabile şi ai soluţiilor corespunzătoare. Aceste soluţii se pot determina prin metoda descrierii complete. Se notează cu $z_i^{(k)}$ valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia de indice i. Valoarea optimă a funcţiei obiectiv, $z_p^{(k)}$, este evident

$$z_p^{(k)} = \{\max_{i \in I_1} z_i^{(k)}\}; \quad k \in \mathcal{K}. \tag{I.7.44}$$

Considerînd acum formularea activă (I.7.20) a problemei pentru acelaşi triplet $(A, b, c)_k$, mai dispunem totdeauna de o mulţime $\mathcal{U}_0$ de matrice de alocaţie admisibile. Pentru o matrice anumită $U \in \mathcal{U}_0$, problema admite un număr finit de soluţii realizabile de bază carac-

terizate, de asemenea, prin indicii $i \in I_0 = \{1, 2, \ldots, i_{k_0}\}$. Fie $z_{d_i}^{(k)}$ valorile funcţiei obiectiv pentru aceste soluţii. Valoarea optimă a funcţiei obiectiv $z_d^{(k)}$ este

$$z_d^{(k)} = \{\max_{i \in I_0} z_{d_i}^{(k)}\}; \quad k \in \mathcal{K}. \tag{I.7.45}$$

Această valoare corespunde unui triplet (A, b, c) dat şi unei anumite matrice de alocaţie U, din mulţimea $\mathcal{U}_0$.

Se mai poate defini valoarea optimă a funcţiei obiectiv $z_a^{(k)}$ pentru tripletul ales $(A, b, c)_k$ pe mulţimea $\mathcal{U}_0$ a tuturor matricelor de alocaţie admisibile, deci

$$z_a^{(k)} = [\max_{U \in \mathcal{U}_0} \{\max_{i \in I_0} z_{d_i}^{(k)}\}]; \quad k \in \mathcal{K}. \tag{I.7.46}$$

În fond $z_p^{(k)}$ şi $z_a^{(k)}$ sînt valorile optime ale funcţiei obiectiv pentru $(A, b, c)_k$, calculate prin metoda pasivă şi activă folosind însă în locul metodei simplex, metoda descrierii complete. Este evident că, oricare ar fi metoda utilizată, optimul funcţiei obiectiv este acelaşi.

Teorema V. Valorile $z_p^{(k)}$, $z_d^{(k)}$, $z_a^{(k)}$ definite anterior satisfac inegalitatea

$$z_d^{(k)} \leqslant z_a^{(k)} \leqslant z_p^{(k)} \tag{I.7.47}$$

pentru toţi $k \in \mathcal{K}$.

Demonstraţie. Inegalitatea $z_d^{(k)} \leqslant z_a^{(k)}$ rezultă din definiţia (I.7.46) dată mărimii $z_a^{(k)}$. Pentru a dovedi că $z_a^{(k)} \leqslant z_p^{(k)}$ remarcăm că, dacă un vector $x \geqslant 0$ satisface sistemul $AX \leqslant BU$, U fiind o matrice de alocaţie, acesta va satisface şi sistemul $Ax \leqslant b$. Altfel spus, mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului $AX \leqslant BU$ este inclusă în mulţimea soluţiilor realizabile ale sistemului $Ax \leqslant b$. Această observaţie dovedeşte că $z_a^{(k)}$ nu poate fi mai mare decît $z_p^{(k)}$.

Exemplul II. Vom verifica inegalităţile (I.7.47) pentru problema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$
$$\max c_1x_1 + c_2x_2$$

în care tripletul $(A, b, c)_k$ este

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b_k = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c_k = (3, 4).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia optimă a problemei rezolvate prin metoda pasivă este $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ şi deci $z_p^{(k)} = 11$.

Pentru calculul valorii $z_d^{(k)}$ vom alege matricea de alocaţie

$$U = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Sistemul de restricţii, pentru U ales, sub forma matriceală, este

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

încît modelul problemei, pentru forma activă, este

$$\begin{gathered} 2x_1 \leqslant 1\,; \quad x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \leqslant 2\,; \quad 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0 \; x_2 \geqslant 0 \\ \max 3x_1 + 4x_2 \end{gathered}$$

Soluţia evidentă $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ conduce la $z_d^{(k)} = 7{,}5$. Pentru a calcula $z_a^{(k)}$ vom scrie modelul

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & 1 - u_{11} \\ u_{21} & 1 - u_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} 0 \leqslant u_{11} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u_{21} \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0 \\ \max 3x_1 + 4x_2 \end{gathered}$$

sau sub formă algebrică

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad - 4u_{11} \quad &\leqslant 0 \\ x_1 \quad - 5u_{21} \quad &\leqslant 0 \\ x_2 + 4u_{11} \quad &\leqslant 4 \\ 2x_2 \quad + 5u_{21} \quad &\leqslant 5 \\ u_{11} \quad &\leqslant 1 \\ u_{21} \quad &\leqslant 1 \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; u_{11} \geqslant 0, \; u_{21} \geqslant 0$$

$$\max 3x_1 + 4x_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția obținută prin simplex este $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $u_{11} = 1/2$, $u_{21} = 1/5$ încît $z_a^{(k)} = 11$. În plus, se știe că matricea optimă de alocație este

$$U^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Pentru exemplul ales s-a găsit $z_d^{(k)} < z_a^{(k)} = z_p^{(k)}$.

Teorema VI. Dacă toate elementele aleatoare dintr-un program stochastic se înlocuiesc prin valorile medii corespunzătoare și se notează cu $z_{\bar{p}}$, $z_{\bar{d}}$ și $z_{\bar{a}}$ valorile optime ale funcției obiectiv respectiv pentru forma pasivă, forma activă cu o matrice de alocație dată și valoarea maximă a funcției obiectiv pe mulțimea tuturor matricelor de alocație admisibile, atunci

$$z_{\bar{d}} \leqslant z_{\bar{a}} \leqslant z_{\bar{p}} . \tag{I.7.48}$$

Demonstrație. Dacă tripletul ($\mathbf{E}A$, $\mathbf{E}b$, $\mathbf{E}c$) face parte din mulțimea tripletelor admisibile, teorema VI este un caz particular al teoremei V. În caz contrar cel puțin una din aceste mărimi nu există și atunci, pentru cele care există, demonstrația rămîne aceeași.

Exemplul III. Pe un teren de 20 ha se pot cultiva legumele l_1 și l_2. Numărul de hectare necesar pentru a obține o unitate de produs, cheltuielile pe unitatea de produs cît și beneficiile sînt variabile aleatoare. Suma de bani de care dispunem este de 100 000 lei. Fie x_1 și x_2 cantitățile de legume care trebuie cultivate pentru a obține maximul funcției

$$c_1 x_1 + c_2 x_2$$

cu condițiile

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leqslant 20$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leqslant 100\,000$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Se cunosc valorile medii ale variabilelor aleatoare c_1, c_2, a_{ij}; $i, j = 1, 2$:

$$c_1 = 437{,}50 \quad c_2 = 225 ; \quad \bar{a}_{11} = \frac{5}{23} ; \quad \bar{a}_{12} = \frac{5}{19} ; \quad \bar{a}_{21} = 1250 ;$$

$$\bar{a}_{22} = 500.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se va verifica pe acest exemplu relaţia

$$z_{\bar{d}} \leqslant z_{\bar{a}} \leqslant z_{\bar{p}}$$

Vom rezolva în primul rînd problema

$$z_{\bar{p}} = \{\max \bar{c}x \mid \bar{A}x \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

deci,

$$\max\ (437{,}50\ x_1 + 225\ x_2)$$

cu condiţiile

$$\frac{x_1}{4{,}6} + \frac{x_2}{3{,}8} \leqslant 20$$

$$1250\ x_1 + 500\ x_2 \leqslant 100\,000$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Folosind metoda grafică de rezolvare a problemelor de programare liniară se găseşte soluţia optimă $x_1 = \frac{5704}{77}$; $x_2 = \frac{1140}{77}$ şi maximul funcţiei obiectiv

$$z_{\bar{p}} = 35\,740 \text{ lei.}$$

Modelul aceleiaşi probleme pentru metoda activă este

$$a_{11}x_1 \leqslant 20\,u_{11} \qquad a_{21}x_1 \leqslant 100\,000\,u_{21}$$

$$a_{12}x_2 \leqslant 20\,u_{12} \qquad a_{22}x_2 \leqslant 100\,000\,u_{22}$$

$$u_{11} + u_{12} = 1 \qquad u_{21} + u_{22} = 1$$

$$0 \leqslant u_{ij} \leqslant 1 \quad i,j = 1,2 \qquad x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

$$\max\ (c_1x_1 + c_2x_2).$$

Pentru a calcula

$$z_{\bar{d}} = \{\max \bar{c}x \mid \bar{A}x \leqslant \bar{b}U,\ x \geqslant 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

alegem matricea de alocaţie

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

încît problema de rezolvat este

$$x_1 \leqslant 27{,}6 \qquad x_1 \leqslant 40$$

$$x_2 \leqslant 53{,}2 \qquad x_2 \leqslant 100$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0$$

$$\max (437{,}50\, x_1 + 225\, x_2).$$

Valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia optimă $x_1 = 27{,}6$ $x_2 = 53{,}2$ este

$$z_{\bar{d}} = 24\,185.$$

Pentru a determina

$$z_{\bar{a}} = \{\max \bar{c}x \mid Ax \leqslant \bar{b}U^*,\ x \geqslant 0\}$$

vom nota $u_{11} = \alpha$; $u_{12} = 1 - \alpha$; $u_{21} = \beta$; $u_{22} = 1 - \beta$ şi vom rezolva următoarea problemă de programare liniară parametrică

$$x_1 \leqslant 92\,\alpha \qquad x_1 \leqslant 80\,\beta$$

$$x_2 \leqslant 76(1 - \alpha) \qquad x_2 \leqslant 200(1 - \beta)$$

$$x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0$$

$$\max (437{,}50\, x_1 + 225\, x_2)$$

în care parametrii α şi β pot lua valori numai în intervalul $[0, 1]$. Structura particulară a acestui model face inutilă aplicarea algoritmului simplex. E uşor de văzut că funcţia $z = cx$ ia valorile

$$z_1 = 23\,150\,\alpha + 17\,100 \text{ dacă } 92\,\alpha \leqslant 80\,\beta$$

$$\text{şi } 76(1 - \alpha) \leqslant 200(1 - \beta)$$

$$z_2 = 40\,250\,\alpha - 2\,000\,\beta - 2\,000 \text{ dacă } 92\,\alpha \leqslant 80\,\beta$$

$$\text{şi } 76(1 - \alpha) \geqslant 200(1 - \beta)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$z_3 = -17\,100\,\alpha + 35\,000\,\beta - 17\,100 \text{ dacă } 92\alpha \geqslant 80\beta$$
$$\text{și } 76(1-\alpha) \leqslant 200(1-\beta)$$
$$z_4 = 33\,000\,\beta + 2\,000 \text{ dacă } 92\alpha \geqslant 80\beta$$
$$\text{și } 76(1-\alpha) \geqslant 200(1-\beta).$$

În fig. 17 s-au reprezentat dreptele

$$92\alpha - 80\beta = 0\,;\quad -76\alpha + 200\beta = 124\,;\quad \alpha = 1\,;\quad \beta = 1$$

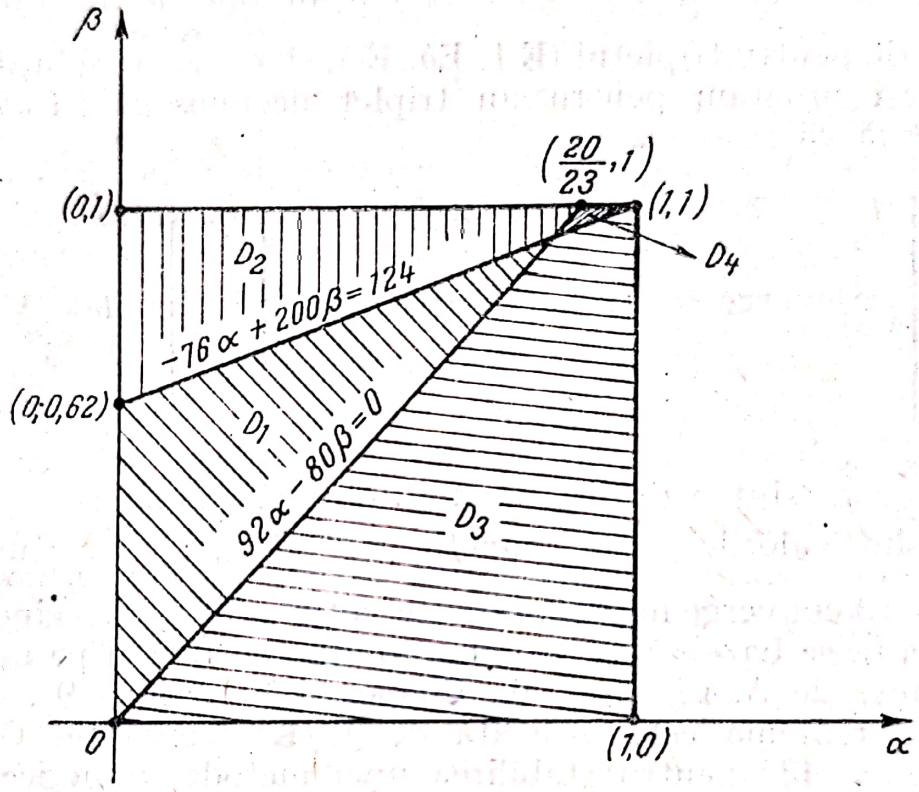

Fig. 17

și s-au determinat domeniile D_i, $i = 1, \ldots, 4$, în care funcția $z = cx$ ia valorile $z = z_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Folosind fig. 17 se calculează cu ușurință maximele funcțiilor z_i.
Astfel avem

$$\{\max z_1 | (\alpha, \beta) \in D_1\} = z\left(\frac{62}{77}, \frac{71{,}3}{77}\right) = 35\,740$$
$$\{\max z_2 | (\alpha, \beta) \in D_2\} = z\left(\frac{20}{23}, 1\right) = 35\,000$$
$$\{\max z_3 | (\alpha, \beta) \in D_3\} = z\left(\frac{62}{77}, \frac{71{,}3}{77}\right) = 35\,740$$
$$\{\max z_4 | (\alpha, \beta) \in D_4\} = z\,(1,\ 1) = 35\,000$$

încît matricea optimă de alocaţie este

$$U^* = \begin{bmatrix} 62/77 & 15/77 \\ 71{,}3/77 & 5{,}7/77 \end{bmatrix}$$

şi

$$z_{\bar{a}} = 35\,740$$

În concluzie şi pentru acest exemplu s-a găsit $z_d \leqslant z_a = z_p$.

Teorema VII. Fie x_d^0, x_a^0, x_p^0 soluţiile optime ale programului deterministic pentru tripletul $(\mathbf{E}A, \mathbf{E}b, \mathbf{E}c)$, şi $\hat{x}_d$, $\hat{x}_a$, $\hat{x}_p$ soluţiile optime ale aceluiaşi program pentru un triplet necunoscut $(A, b, c)_N$. Se demonstrează că

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{x}_a \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \text{ converge în probabilitate către } \begin{bmatrix} x_p^0 \\ x_a^0 \\ x_d^0 \end{bmatrix} \text{ cînd } N \to \infty.$$

Dacă $\hat{z}_p$, $\hat{z}_a$, $\hat{z}_d$ sînt valorile funcţiei obiectiv pentru $\hat{x}_p$, $\hat{x}_a$, $\hat{x}_d$ şi z_p^0, z_a^0, z_d^0 sînt valorile acestei funcţii pentru x_p^0, x_a^0, x_d^0, atunci

$(\hat{z}_d, \hat{z}_a, \hat{z}_p)$ converge în probabilitate către (z_d^0, z_a^0, z_p^0) cînd $N \to \infty$. Demonstraţia se bazează pe teorema limită centrală şi pe unele rezultate obţinute de A. Charnes, W. Cooper şi Ferguson [9].

Această teoremă este utilizată de J. K. Sengupta, G. Tintner şi C. Millham [43] pentru stabilirea unei metode numerice de aproximare a distribuţiei optimului z a programelor stochastice.

Stabilitatea soluţiilor în problemele de programare liniară stochastică

Pentru a lămuri sensul noţiunii de „stabilitate" a unei soluţi într-o problemă de programare liniară să presupunem că s-a determinat vectorul x^* care realizează maximul funcţiei

$$z = cx \tag{I.7.49}$$

cu condiţiile

$$Ax \leqslant b \tag{I.7.50}$$

$$x \geqslant 0.$$

x^* reprezintă, pentru cel ce ia deciziile, programul optim de activitate. Să admitem că s-au putut face unele erori în determinarea coeficienților a_{ij}, b_i și c_j; $i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots, n$. Fie α matricea erorilor aleatoare ale coeficienților a_{ij}; β și γ vectorii formați din erorile aleatoare ale componentelor lui b și c. Soluția x^* este „stabilă" dacă rămîne optimă și pentru problema

$$\max z = (c + \gamma)x \tag{I.7.51}$$

cu condițiile

$$(A + \alpha)x \leqslant (b + \beta) \tag{I.7.52}$$

$$x \geqslant 0.$$

Studiul stabilității unei soluții sau al „sensibilității" ei la variațiile aleatoare ale coeficienților modelului este interesant din punct de vedere teoretic și în același timp important din punct de vedere practic deoarece, în cele mai multe cazuri, valorile mărimilor a_{ij}, b_i și c_j nu sînt cunoscute exact și în calcule se folosesc deobicei estimațiile lor. Th. Saaty [40] studiază dependența soluției optime de coeficienții modelului în ipoteza că acești coeficienți sînt funcții cunoscute de un parametru. J. Sengupta, C. Millham și G. Tintner [42] se ocupă de stabilitatea soluțiilor în problemele de programare liniară stochastică față de erorile aleatoare ale coeficienților modelului. J. Sengupta în [44] continuă acest studiu comparînd stabilitatea soluțiilor obținute prin metoda pasivă și activă de rezolvare a programelor stochastice. Autorii acestor studii adoptă ca măsură a stabilității unei soluții, varianța ei. În cele ce urmează vom expune principalele rezultate din lucrările [42] și [44].

Ceea ce caracterizează studiile de care ne ocupăm este faptul că se iau în considerare nu numai soluțiile optime ci toată mulțimea soluțiilor realizabile de bază obținută prin metoda descrierii complete.

În primul rînd se caută condițiile care trebuie impuse variației tripletului (α, β, γ) pentru ca soluția optimă deci și valoarea optimă a funcției obiectiv să fie stabile sau, altfel spus, relativ insensibile la variațiile aleatoare ale coeficienților modelului.

Se admite că erorile α, β, γ sînt variabile aleatoare continue și că domeniile pe care sînt definite funcțiile densităților de probabilitate corespunzătoare, $f_A(\alpha)$, $f_b(\beta)$, $f_c(\gamma)$ sînt intervale închise și mărginite ale axei reale încît, dacă problema (I.7.49) — (I.7.50) admite soluții, z este un punct în spațiul topologic R^{mn+m+n} determinat de coeficienții a_{ij}, b_i și c_j. Deși erorile α, β, γ nu sînt cunoscute presu-

punem că putem dispune de un număr de valori ale tripletului $(A + \alpha, b + \beta, c + \gamma)$ pe care le caracterizăm prin indicii $r = 1, 2, \ldots R$.

Tripletul $S_q = (A + \alpha, b + \beta, c + \gamma)_q$, $q = 1, 2, \ldots Q$, $(Q \leqslant R)$ este *admisibil* dacă satisface condiţiile următoare:

(*i*) Problema de programare liniară deterministică obţinută pentru S_q are o mulţime nevidă, mărginită şi nedegenerată de soluţii realizabile de bază. Valorile funcţiei obiectiv pe această mulţime sînt finite;

(*ii*) Probabilitatea ca un element al vectorului $(c + \gamma)$ să ia o valoare negativă este nulă.

Rezolvînd prin metoda descrierii complete problema de programare liniară deterministică obţinută din (I.7.51) — (I.7.52) pentru un S_q determinat, se găsesc toate soluţiile realizabile de bază. Fie $k = 1, 2, \ldots, k_q$ indicii care caracterizează aceste soluţii şi $F_{(z)}^{(k)}$ valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia de indice k. Considerăm valori suficient de mici pentru α_{ij} astfel, încît, dacă o submulţime de vectori din A formează o bază, aceeaşi submulţime de vectori din $(A + \alpha)$ să formeaze de asemenea o bază adică vectorii să rămînă liniar independenţi.

Teorema VIII. Să admitem că există o soluţie realizabilă de bază cu indicele k_1, astfel ca valoarea funcţiei obiectiv pentru această soluţie $F^{(k_1)}(z)$ să fie mai mare decît oricare dintre valorile pe care le ia această funcţie pe mulţimea soluţiilor realizabile de bază, deci să avem:

$$F^{(k_1)}(z) > F^{(k)}(z) \quad \text{pentru orice } k \neq k_1. \tag{I.7.53}$$

Atunci există o vecinătate $N(z)$ a punctului z, determinată de erorile α_{ij}, β_i, γ_j, astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea

$$F^{(k)}(y) < F^{(k_1)}(y) \quad \text{pentru orice } y \in N(z). \tag{I.7.54}$$

Demonstraţie. Valoarea funcţiei obiectiv pentru orice soluţie realizabilă de bază este o funcţie continuă de coeficienţii modelului deoarece S_q satisface condiţia (*i*). Atunci funcţia

$$F^{(k_1)}(z) - F^{(k)}(z)$$

pentru $k \neq k_1$ fiind o diferenţă de funcţii continue este continuă pe produsul cartezian al domeniilor pe care sînt definite funcţiile $f_A(\alpha)$, $f_b(\beta)$, $f_c(\gamma)$. Deoarece $F^{(k_1)}(z) - F^{(k)}(z) > 0$ există o vecinătate $N(z)$ a punctului z astfel încît (I.7.54) să fie satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția de indice k_1 sau, ceea ce este echivalent, valoarea funcției obiectiv $F^{(k_1)}(z)$ pentru această soluție este stabilă pe mulțimea $N(z)$.

Considerăm că exemplul numeric dat în lucrarea [42] pentru determinarea erorilor α_{ij} pentru care o soluție rămîne stabilă, contribuie la lămurirea problemei încît îl reproducem.

Exemplul IV. Să se determine

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2 \tag{I.7.55}$$

cu condițiile

$$\begin{aligned}(5 + \alpha_{11})x_1 + (2 + \alpha_{12})x_2 &\leqslant 10\\ (3 + \alpha_{21})x_1 + (3 + \alpha_{22})x_2 &\leqslant 7\\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0\end{aligned} \tag{I.7.56}$$

Dacă notăm că x_3 și x_4 variabilele de abatere care transformă inegalitățile (I.7.56) în ecuații, soluțiile realizabile de bază pot fi:

$$x^{(1)}(x_1,x_2)\ ;\ x^{(2)}(x_1,x_3)\ ;\ x^{(3)}(x_1,x_4)\ ;\ x^{(4)}(x_2,x_3)\ ;\ x^{(5)}(x_2,x_4)\ ;\ x^{(6)}(x_3,x_4)$$

Soluția $x^{(6)}$ nu prezintă interes și de aceea se exclude. Soluțiile $x^{(2)}$ și $x^{(5)}$ nu sînt realizabile cînd erorile sînt nule astfel că mulțimea soluțiilor realizabile de bază este formată din $x^{(1)}$, $x^{(3)}$ și $x^{(4)}$. Valorile funcției obiectiv pentru aceste soluții sînt

$$F^{(1)}(y) = \frac{68 + 30\alpha_{22} - 21\alpha_{12} + 28\alpha_{11} - 40\alpha_{21}}{9 + 5\alpha_{22} + 3\alpha_{11} - 3\alpha_{12} - 2\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}.$$

Pentru $\alpha_{ij} = 0\ ;\ i,j = 1,2\quad F^{(1)}(z) = \frac{68}{9}$

$$F^{(3)}(y) = \frac{30}{5 + \alpha_{11}} \quad \text{și} \quad F^{(3)}(z) = \frac{30}{5}$$

$$F^{(4)}(y) = \frac{28}{3 + \alpha_{22}} \quad \text{și} \quad F^{(4)}(z) = \frac{28}{3}.$$

De aici rezultă că $F^{(4)}(z)$ este valoarea maximă a funcției obiectiv cînd $\alpha_{ij} = 0,\ i,j = 1,2$. Acum se pune următoarea întrebare: cît de mari pot fi valorile absolute ale erorilor astfel ca $F^{(4)}(z)$ să fie stabil adică să rămînă optim. În primul rînd se observă că $F^{(1)}(y)$, $F^{(3)}(y)$, și $F^{(4)}(y)$, rămîn finite și pozitive sau că vectorii asociați

Scanned with OKEN Scanner

variabilelor (x_1x_2) ; (x_1x_4) și (x_2x_4) sînt liniar independenți, dacă sînt satisfăcute inegalitățile :

$$5\alpha_{22} + 3\alpha_{11} - 3\alpha_{12} - 2\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} > -9 \quad \text{(I.7.57)}$$

$$\alpha_{11} > -5 \quad \text{(I.7.58)}$$

$$\alpha_{22} > -3 \quad \text{(I.7.59)}$$

Soluția $x^{(4)}(x_2,x_3)$ rămîne optimă dacă

$$F^{(4)}(y) > F^{(1)}(y) \text{ și } F^{(4)}(y) > F^{(3)}(y)$$

deci, dacă

$$\frac{28}{3+\alpha_{22}} > \frac{68 + 30\alpha_{22} - 21\alpha_{12} + 28\alpha_{11} - 40\alpha_{21}}{9 + 5\alpha_{22} + 3\alpha_{11} - 3\alpha_{12} - 2\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}} \quad \text{(I.7.60)}$$

$$\frac{28}{3+\alpha_{22}} > \frac{30}{5+\alpha_{11}}. \quad \text{(I.7.61)}$$

Numitorii fracțiilor din relațiile (I.7.60) — (I.7.61) sînt pozitivi în baza condițiilor (I.7.57 — I.7.59) încît pot fi eliminați iar condițiile de optimalitate ale soluției $x^{(4)}$ se înlocuiesc prin

$$G_1(\alpha) \equiv 48 - 18\alpha_{22} - 21\alpha_{12} + 64\alpha_{21} - 28\alpha_{21}\alpha_{12} - 30\alpha_{22}^2 + 21\alpha_{21}\alpha_{22} + 40\alpha_{21}\alpha_{22} > 0 \quad \text{(I.7.62)}$$

$$G_2(\alpha) \equiv 50 + 28\alpha_{11} \geqslant 30\alpha_{22}. \quad \text{(I.7.63)}$$

Dacă toate erorile α_{ij} sînt mai mari în valoare absolută decît 20% din valorile coeficienților a_{ij}, inegalitatea (I.7.62) nu este satisfăcută. De exemplu, combinația $\alpha_{22} = 0{,}6$; $\alpha_{21} = -0{,}6$; $\alpha_{12} = -0{,}4$ nu satisface inegalitatea (I.7.62) încît soluția $x^{(4)}$ nu este stabilă dacă erorile făcute în determinarea coeficienților reprezintă 20% din valorile lor.

Dacă $|\alpha_{ij}| \leqslant 0{,}1\, a_{ij}$ pentru toți a_{ij} adică dacă $|\alpha_{11}| \leqslant 0{,}5$; $|\alpha_{12}| \leqslant 0{,}2$ $|\alpha_{21}| \leqslant 0{,}3$ și $|\alpha_{22}| \leqslant 0{,}3$ sînt satisfăcute la limită atît condițiile (I.7.57 — I.7.59) cît și (I.7.62 — I.7.63).

Derivatele de ordinul I ale funcției $G_1(\alpha)$ se anulează pentru $\alpha_{22} = 0{,}53$; $\alpha_{21} = -0{,}245$; $\alpha_{12} = 1{,}53$ încît punctul cu aceste coordonate îndeplinește condițiile necesare pentru a fi un extrem relativ al funcției $G_1(\alpha)$. Acest punct nu se găsește în regiunea definită de $|\alpha_{ij}| \leqslant$

Scanned with OKEN Scanner

$\leqslant 0{,}1|a_{ij}|$ încît $G_1(\alpha)$ nu poate deveni negativ sau nul în această regiune. În concluzie, un domeniu de stabilitate pentru $x^{(4)}$ și $F^{(4)}$ este:

$$4{,}5 \leqslant a_{11} \leqslant 5{,}5$$
$$1{,}8 \leqslant a_{12} \leqslant 2{,}2$$
$$2{,}7 \leqslant a_{21} \leqslant 3{,}3$$
$$2{,}7 \leqslant a_{22} \leqslant 3{,}3$$

Definiția maximelor trunchiate

Fie $S_q = (A + \alpha,\ b + \beta,\ c + \gamma)_q,\ q = 1, \ldots, Q$ un triplet admisibil și $k = 1, 2, \ldots, k_q$ indicii soluțiilor realizabile de bază ale problemei deterministice (I.7.51) — (I.7.52) pentru S_q. Notăm cu $F_q^{(k)}(z)$ valoarea funcției obiectiv pentru soluția de indice k. Fie

$$F_q^{(i)} = \max_k \{F_q^{(k)}(z) \mid k = 1, 2, \ldots, k_q\}$$

$$F_q^{(j)} = \max_k \{F_q^{(k)}(z) \mid k = 1, 2, \ldots, k_q \text{ și } k \neq i\} \qquad \text{(I.7.64)}$$

$$F_q^{(p)} = \max_k \{F_q^{(k)}(z) \mid k = 1, 2, \ldots, k_q \text{ și } k \neq i;\ k \neq j\}.$$

Valoarea $F_q^{(i)}$ se numește *maximul trunchiat de ordinul zero* sau „maximul veritabil" sau „cea mai bună soluție".

Valoarea $F_q^{(j)}$ se numește *maximul trunchiat de ordinul întîi* sau „a doua dintre cele mai bune soluții".

Valoarea $F_q^{(p)}$ se numește *maximul trunchiat de ordinul doi* sau „a treia dintre cele mai bune soluții".

Observăm că maximul trunchiat de ordinul zero este cea mai mare valoare a funcției obiectiv pe toată mulțimea soluțiilor realizabile de bază; maximul trunchiat de ordinul întîi este cea mai mare valoare a funcției obiectiv pe mulțimea soluțiilor realizabile de bază trunchiată prin excluderea soluției de indice i; maximul trunchiat de ordinul doi se definește pe mulțimea trunchiată prin excluderea soluțiilor de indice i și j. Procesul poate fi continuat astfel încît valorile funcției obiectiv pe mulțimea soluțiilor realizabile de bază să fie ordonate într-un șir strict descrescător.

Se poate demonstra că dacă se elimină o soluție realizabilă de bază a sistemului $Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0$, mulțimea soluțiilor realizabile

Scanned with OKEN Scanner

rămase este tot o mulțime convexă. Valabilitatea afirmației reiese intuitiv din fig. 18. Vîrfurile i, j, k, l, m reprezintă soluțiile realizabile de bază ale unui sistem de inecuații liniare și mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale acestor soluții este mulțimea convexă D,

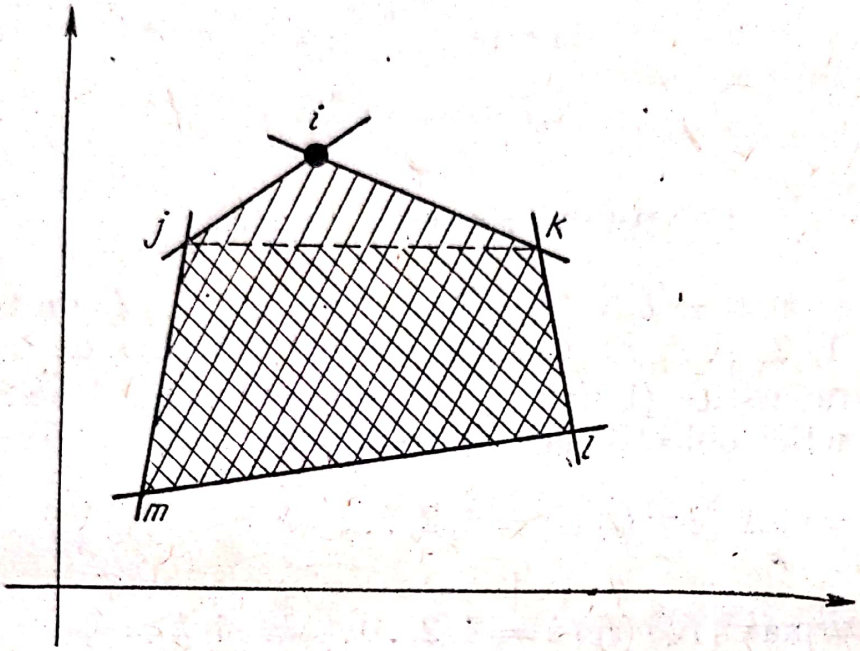

Fig. 18

adică, mulțimea soluțiilor realizabile. Dacă excludem soluția i, mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale soluțiilor j, k, l, m este tot o mulțime convexă obținută prin trunchierea mulțimii D.

Din definițiile date maximelor trunchiate de ordinul zero, întîi și doi, rezultă că

$$F_q^{(i)} > F_q^{(j)} > F_q^{(p)}. \tag{I.7.65}$$

Inegalitatea strictă se asigură notînd cu același indice soluțiile realizabile de bază pentru care funcția obiectiv ia aceeași valoare.

Fie E_s media valorilor $F_q^{(s)}$ pe mulțimea tripletelor S_q și V_s varianța lui $F_q^{(s)}$ pe aceeași mulțime. Din (I.7.65) rezultă că

$$E_i > E_j > E_p \tag{I.7.66}$$

dacă aceste valori sînt definite.

Pentru simplificarea notațiilor să înlocuim $F_q^{(i)}$ prin f_1 și $F_q^{(j)}$ prin f_2. Prima inegalitate din (I.7.65) se scrie atunci

$$f_1 > f_2 \tag{I.7.67}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (I.7.67) ne îndreptăţeşte să afirmăm că există un număr $h > 1$ care satisface condiţia

$$f_1 = hf_2 \tag{I.7.68}$$

Teorema IX. Dacă variabila aleatoare h definită de relaţia $f_1 = hf_2$ este astfel încît funcţia

$$g = g(h, f_2) = h^2 f_2^2$$

să fie analitică în vecinătatea valorilor medii $\bar{h}$ şi $\bar{f}_2$ ale variabilelor h şi f_2 pentru toate variaţiile aleatoare admisibile, atunci maximul trunchiat de ordinul zero are o varianţă mai mare decît maximul trunchiat de ordinul întîi, cînd sînt îndeplinite unele condiţii foarte puţin restrictive (vezi condiţiile C de mai jos).

Dacă se notează cu V_1 şi V_2 varianţele maximelor trunchiate f_1 şi f_2, trebuie arătat că în condiţiile cerute

$$V_1 > V_2$$

Demonstraţie. Fie $d_i = (f_i - \bar{f}_i)/\bar{f}_i$, $i = 1,2$, şi $d_h = (h - \bar{h})/\bar{h}$. Prin formula de calcul a varianţei unui produs, avem

$$V_1 = \text{Var } f_1 = \text{Var}(hf_2) = (\bar{h}\bar{f}_2)^2 [\mathbf{E}\{(d_h + 1)^2 (d_2 + 1)^2\} - \\ - \{\mathbf{E}(hf_2)/(\bar{h}\bar{f}_2)\}^2]. \tag{I.7.69}$$

Dezvoltînd în serie Taylor funcţia $g = h^2 f_2^2$, care prin ipoteză este analitică în vecinătatea punctului $\bar{h}$, $\bar{f}_2$, avem

$$g(h, f_2) = g(\bar{h}, \bar{f}_2) + (h - \bar{h}) \frac{\partial g(\bar{h}, \bar{f}_2)}{\partial h} + (f_2 - \bar{f}_2) \frac{\partial g(\bar{h}, \bar{f}_2)}{\partial f_2} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ (h - \bar{h})^2 \frac{\partial^2 g(\bar{h}, \bar{f}_2)}{\partial h^2} + (f_2 - \bar{f}_2)^2 \frac{\partial^2 g(\bar{h}, \bar{f}_2)}{\partial f_2^2} \right\} + \varphi(h, f_2) \tag{I.7.70}$$

Prin $\varphi(h, f_2)$ s-au notat termenii din seria Taylor consideraţi neglijabili în sensul că valoarea lor medie este nulă. Aplicînd operatorul medie egalităţii (I.7.70) se obţine

$$\mathbf{E}g(hf_2) = (\bar{h}\bar{f}_2)^2 + (\bar{h})^2 V_2 + (\bar{f}_2)^2 V_h \tag{I.7.71}$$

unde $V_h = \text{Var } (h)$.
Folosind acest rezultat se găseşte

$$\mathbf{E}\{(d_h + 1)^2 (d_2 + 1)^2\} = 1 - \frac{1}{(\bar{f}_2)^2} + \frac{V_h}{(\bar{h})^2} + \frac{V_2}{(\bar{f}_2)^2}. \tag{I.7.72}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\bar{f}_2 > 1$, din (I.7.72) rezultă că

$$\mathbf{E}\{(d_h + 1)^2(d_2 + 1)^2\} > 0. \tag{I.7.73}$$

Pe de altă parte, media produsului hf_2 este pozitivă și mai mică decît produsul $\bar{h}\bar{f}_2$ deoarece h și f_2 sînt mărimi strict pozitive pentru toți S_q admisibili. Deoarece

$$0 < \mathbf{E}(hf_2) < \bar{h}\,\bar{f}_2$$

există un număr real $\theta \in (0,1)$ astfel ca

$$\mathbf{E}(hf_2) = \theta\,\bar{h}\,\bar{f}_2 \tag{I.7.74}$$

Din relațiile (I.7.69), (I.7.73) și (I.7.74) se deduce cu ușurință egalitatea

$$V_1 - V_2 = (\bar{h}\,\bar{f}_2)^2\left[1 - \frac{1}{(\bar{f}_2)^2} + \frac{V_h}{(\bar{h})^2} - \theta\right] + (\bar{h}^2 - 1)V_2 \tag{I.7.75}$$

Deoarece $\bar{h} > 1$ avem $\bar{h}^2 - 1 > 0$; de asemenea $\frac{1}{\bar{f}_2} < 1$ încît

$$1 - \frac{1}{(\bar{f}_2)^2} + \frac{V_h}{(\bar{h})^2} - \theta > 0$$

dacă este îndeplinită oricare din condițiile (suficiente dar nu necesare)

$$V_h \geqslant \theta\bar{h}^2 \quad \text{sau} \quad \theta + \frac{1}{(\bar{f}_2)^2} \leqslant 1 \tag{C}$$

și atunci, din (I.7.75) rezultă că

$$V_1 > V_2$$

Corolar. Dacă, în condițiile teoremei IX distribuția variabilei h nu depinde de f_2, atunci inegalitatea

$$V_1 > V_2$$

este adevărată.

Demonstrație. Este ușor de văzut că, în condițiile corolarului,

$$V_1 - V_2 = (\bar{f}_2)^2 V_h + \{V_h + (\bar{h})^2 - 1\}V_2$$

și, deoarece $\bar{h} > 1$, rezultă că $V_1 > V_2$.

Teorema IX și corolarul ei se pot aplica și perechii de funcții f_2, $f_3 = F_q^{(p)}$. Notînd cu V_3 varianța lui f_3, avem

$$V_1 > V_2 > V_3.$$

Deoarece varianța este o măsură a stabilității optimului, rezultă că maximul trunchiat de ordinul zero este mai puțin stabil decît maximul trunchiat de ordinul întîi și acesta, la rîndul său, este mai puțin stabil decît maximul trunchiat de ordinul doi.

J.K. Sengupta [44] extinde ideea ordonării valorilor pe care le ia funcția obiectiv pe mulțimea soluțiilor realizabile de bază.

Pentru un S_k admisibil, fie $\mathcal{N}_k = \{1,2,\ldots, N_k\}$ mulțimea indicilor soluțiilor realizabile de bază ale problemei:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij}x_j = b_i\,; \quad i = 1,\ldots,m \\ &x_j \geqslant 0\,;\ j = 1, \ldots,\ m+n \qquad\qquad (I.7.76) \\ &\max z = \sum_{j=1}^{m+n} c_j x_j. \end{aligned}$$

Problema (I.7.76) se obține din (I.7.49) — (I.7.50) prin introducerea variabilelor artificiale încît componentele c_j, $j = n+1, \ldots, n+m$, ale vectorului $\boldsymbol{c}$ sînt nule. Se notează cu $Z^{(k)}$ mulțimea $\{z_n^{(k)} | n \in \mathcal{N}_k\}$ a valorilor funcției obiectiv pentru soluțiile de bază realizabile. $Z^{(k)}$ este o mulțime finită care poate fi ordonată definind

$$\begin{aligned} z_1^{(k)} &= \max[z_n^{(k)} | z_n^{(k)} \in Z^{(k)}] \\ z_2^{(k)} &= \max[z_n^{(k)} | z_n^{(k)} \in Z^{(k)} - \{z_1^{(k)}\}] \\ z_3^{(k)} &= \max[z_n^{(k)} | z_n^{(k)} \in Z^{(k)} - \{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\}] \qquad (I.7.77) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{N_k}^{(k)} &= \max[z_n^{(k)} | z_n^{(k)} \in Z^{(k)} - \{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{N_k-1}^{(k)}\}]. \end{aligned}$$

Admitem că mulțimea $\mathcal{N}_k$ este astfel definită încît nu conține indicii soluțiilor realizabile de bază pentru care funcția obiectiv ia valori nule. Din definiția mulțimii $\mathcal{N}_k$ și din condiția (*ii*) conținută în definiția tripletelor S_q admisibile, rezultă că toate elementele mulțimii $Z^{(k)}$ sînt pozitive. Din condiția (*i*) care definește tripletele admisibile S_q rezultă că $z_1^{(k)}$ este mărginit. În baza egalităților (I.7.77) avem

$$z_1^{(k)} > z_2^{(k)} > \ldots > z_{N_k}^{(k)} > 0. \qquad (I.7.78)$$

Să considerăm acum toate tripletele admisibile S_k, $k = 1,2,\ldots, k_q$ și să definim pentru fiecare din ele șirul (I.7.78). Este probabil ca șirurile corespunzătoare tripletelor S_{k_1} și S_{k_2}, $k_1 \neq k_2$ să aibă un număr

Scanned with OKEN Scanner

diferit de termeni. Fie $N_1, N_2, \ldots N_k$ numărul termenilor din şirul (I.7.78) pentru tripletele $S_1, S_2, \ldots S_k$ şi N cel mai mic dintre aceste numere. Evident că $N \neq 0$ deoarece prin definiţie, pentru orice S_k admisibil, problema (I.7.76) admite soluţii realizabile de bază. Vom reţine acum din fiecare şir (I.7.78) numai N termeni încît pentru orice $k = 1, 2, \ldots, k_q$ se reţin N valori ale funcţiei obiectiv

$$z_1^{(k)} > z_2^{(k)} > \ldots > z_N^{(k)} > 0 \tag{I.7.79}$$

unde $k = 1,2,\ldots, k_q$ şi $z_1^{(k)}$ este mărginit. Luînd mediile valorilor $z_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, N$, pentru $k = 1, 2, \ldots, k_q$ şi notînd $E(z_i^{(k)}) = \bar{z}_i$; $i = 1,2,\ldots, N$, din (I.6.79) rezultă că

$$\bar{z}_1 > \bar{z}_2 > \ldots > \bar{z}_N > 0. \tag{I.7.80}$$

Deoarece $z_1^{(k)}$ şi $z_2^{(k)}$ sînt strict pozitivi şi $z_1^{(k)} > z_2^{(k)}$, există variabile $h_{12}^{(k)} > 1$ astfel încît

$$z_1^{(k)} = h_{12}^{(k)} z_2^{(k)} \text{ pentru toţi } k = 1,2,\ldots, k_q \tag{I.7.81}$$

Teorema X. Fie $V_i, i = 1,2,\ldots,N$ varianţa variabilei aleatoare $z_i^{(k)}$ definită pentru $k = 1,2,\ldots, k_q$ şi $h_{ij}^{(k)}$, $j > i$, variabilele definite prin egalităţi de tipul (I.7.81), i şi $j \in (1,2,\ldots,N)$.
Inegalitatea strictă

$$V_1 > V_2 > \ldots > V_n \tag{I.7.82}$$

este adevărată dacă variabilele aleatoare $h_{ij}^{(k)}$ şi $z_j^{(k)}$, $j > i$ satisfac cel puţin una dintre următoarele condiţii:
(*i*) $h_{ij}^{(k)}$ şi $z_j^{(k)}$ pentru $j > i$; $i, j \in (1,2,\ldots,N)$ sînt stochastic independente;

(*ii*) $\text{Var}\,(h_{ij}z_j) \simeq (\bar{z}_j)^2\ \text{Var}(h_{ij}) + (\bar{h}_{ij})^2\,\text{Var}(z_j) + 2(\bar{h}_{ij}\bar{z}_j)\,\mathbf{E}\,[(h_{ij} - \bar{h}_{ij})(z_j - \bar{z}_j)]$

pentru toţi $j > i$, $i, j \in N$ şi

$$\mathbf{E}[(h_{ij} - \bar{h}_{ij})(z_j - \bar{z}_j)]$$

unde $\bar{h}_{ij} = \mathbf{E}(h_{ij}^{(k)})$ şi $\bar{z}_j = (\mathbf{E}(z_j^{(k)})$ este fie nenegativă, fie neglijabilă;
(*iii*) $h_{ij}^{(k)}$ şi $z_j^{(k)}$ sînt statistic dependente dar

$$\mathbf{E}\{[(h_{ij})^2 - (\bar{h}_{ij})^2](z_2)^2\}$$

este nenegativă sau neglijabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Pentru a arăta că $V_1 > V_2$ cînd h_{12} și z_2 sînt statistic independente se calculează V_1 varianța lui $z_1^{(k)} = h_{12}^{(k)} z_2^{(k)}$. Avem

$$V_1 = \mathrm{Var}(h_{12}^{(k)} z_2^{(k)}) = V(h_{12}) V_2 + (\bar{h}_{12})^2 V_2 + (\bar{z}_2)^2 V(h_{12}) \quad \text{(I.7.83)}$$

unde s-a notat cu $V(h_{12})$ varianța lui h_{12} pentru $k = 1,2,\ldots k_q$. Scăzînd din ambii membri ai egalității (I.7.83) pe V_2, avem

$$V_1 - V_2 = (\bar{z}_2)^2 V(h_{12}) + [V(h_{12}) + (\bar{h}_{12})^2 - 1] V_2 \quad \text{(I.7.84)}$$

Deoarece $h_{12}^{(k)} > 1$ pentru $k = 1,2,\ldots,k_q$, $\mathbf{E}(h_{12}) > 1$ încît, din (I.7.84) rezultă că $V_1 > V_2$. Analog se justifică inegalitățile $V_i > V_j$, $j > i$, $i, j \in N$ dacă este îndeplinită condiția (*i*) din enunțul teoremei.

Să presupunem acum că este îndeplinită condiția (*ii*) adică $h_{ij}^{(k)}$ și $z_j^{(k)}$ sînt aproximativ independenți. Atunci,

$$V_1 - V_2 = \mathrm{Var}(h_{12} z_2) - V_2 \simeq (\bar{z}_2)^2 V(h_{12}) + 2(\bar{h}_{12}\bar{z}_2)\mathbf{E}(h_{12} - \bar{h}_{12})$$
$$(z_2 - \bar{z}_2) + [(\bar{h}_{12})^2 - 1] V_2 \quad \text{(I.7.85)}$$

Deoarece $\bar{h}_{12} > 1$ din (I.7.85) rezultă că $V_1 > V_2$

Pentru cazul în care h_{12} și z_2 sînt statistic dependenți, scriem definiția varianței

$$V_1 = \mathrm{Var}(h_{12} z_2) = \mathbf{E}(h_{12} z_2)^2 - [\mathbf{E}(h_{12} z_2)]^2 \quad \text{(I.7.86)}$$

Deoarece $h_{12}^{(k)}$ și $z_2^{(k)}$ sînt strict pozitivi pentru $k = 1,2,\ldots, k_q$ iar distribuțiile variabilelor h_{12} și z_2 sînt prin ipoteză nedegenerate, avem inegalitatea strictă

$$0 < \mathbf{E}(h_{12} z_2) < \bar{h}_{12}\bar{z}_2. \quad \text{(I.7.87)}$$

Pe de altă parte se poate scrie

$$\mathbf{E}(h_{12}z_2)^2 = (\bar{h}_{12}\bar{z}_2)^2 \mathbf{E}\left[\left(\frac{h_{12} - \bar{h}_{12}}{\bar{h}_{12}} + 1\right)^2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{\bar{z}_2} + 1\right)^2\right] =$$

$$= (\bar{h}_{12}\bar{z}_2)^2 \mathbf{E}\left\{\left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{\bar{z}_2} + 1\right)^2 + \frac{(h_{12})^2 - (\bar{h}_{12})^2}{(\bar{h}_{12})^2} \cdot \left(\frac{z_2}{\bar{z}_2}\right)^2\right\} =$$

$$= (\bar{h}_{12}\bar{z}_2)^2 \left[1 + \frac{V_2}{(\bar{z}_2)^2} + \mathbf{E}\frac{(h_{12})^2 - (\bar{h}_{12})^2}{(\bar{h}_{12})^2} \cdot \left(\frac{z_2}{\bar{z}_2}\right)^2\right] =$$

$$= (\bar{h}_{12}\bar{z}_2)^2 + (\bar{h}_{12})^2 + \mathbf{E}\{[(h_{12})^2 - (\bar{h}_{12})^2](z_2)^2\}. \quad \text{(I.7.88)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (I.7.86) termenul $\mathbf{E}(h_{12}z_2)^2$ prin valoarea obținută în (I.7.88) și scăzînd din ambii membri ai egalității pe V_2, avem

$$V_1 - V_2 = (\bar{h}_{12}\bar{z}_2)^2 + [(\bar{h}_{12})^2 - 1]V_2 + \\ + \mathbf{E}\{[(h_{12})^2 - (\bar{h}_{12})^2](z_2)^2\} - \mathbf{E}(h_{12}z_2). \tag{I.7.89}$$

Ținînd seamă de condiția (*iii*), de inegalitatea (I.7.87) și de faptul că $h_{12} > 1$, din (I.7.89) rezultă că $V_1 > V_2$.

În mod analog se demonstrează că $V_i > V_j$, $j > i$, $i,j \in (1,2...N)$.

Corolarul I. Dacă sînt satisfăcute condițiile teoremei X, trebuie să existe cîte un $\bar{z}_i$ și un V_i în șirurile monoton crescătoare

$$\bar{z}_1 > \bar{z}_2 > \ldots > \bar{z}_N$$

$$V_1 > V_2 > \ldots > V_N$$

astfel ca să fie satisfăcute, concomitent sau cel puțin separat, egalitățile

$$\frac{\sigma_i}{\bar{z}_i} = \min_j \left[\frac{\sigma_j}{\bar{z}_j},\ j = 1,2,\ldots N\right]$$

$$\bar{z}_i - m\sigma_i = \max_j\ [\bar{z}_j - m\sigma_j,\ j = 1,2,\ldots,\ N]$$

$$\mathbf{P}_i(\bar{z}_i \pm m\sigma_i) = \max_j\ [\mathbf{P}_j(\bar{z}_j \pm m\sigma_j)\ ;\ j = 1,2,\ldots,N]$$

unde $\sigma_i = \sqrt{V_i}$ și m este limita inferioară a intervalului de încredere iar $\mathbf{P}_i(\bar{z}_i \pm m\sigma_i)$ este probabilitatea ca un $\bar{z}_i$ oarecare, $i = 1,2,\ldots N$ să se afle în intervalul nevid $(\bar{z}_i - m\sigma_i,\ z_i + m\sigma_i)$.

Corolarul II. Fie v_i coeficientul de variație definit de relația

$$v_i = \frac{\sigma_i}{\bar{z}_i}\ ;\ i = 1,2,\ldots,\ N.$$

Dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei X, atunci valoarea maximă $z_1^{(k)}$ corespunde coeficientului minim de variație, dacă și numai dacă

$$\frac{n_j}{m_j} \leqslant 1 \quad \text{pentru toți } j = 1,2,\ldots,\ N$$

unde $m_j > 1$ și $n_j > 1$ satisfac egalitățile

$$\bar{z}_1 = m_j\bar{z}_j,\quad \sigma_1 = n_j\sigma_j \text{ pentru } j \neq 1,\ j = 2,3,\ \ldots N.$$

Teorema XI. Fie $z_1^{(k)} = h_{12}^{(k)} z_2^{(k)}$, $h_{12}^{(k)} > 1$ pentru $k = 1,2,\ldots, k_q$; $F_1^{(k)}$ funcțiile de distribuție ale șirului $\{z_1^{(k)}\}$;

Scanned with OKEN Scanner

$F_2^{(k)}$ funcţiile de distribuţie ale şirului $\{z_2^{(k)}\}$.

Dacă sînt îndeplinite condiţiile:

(*i*) şirul $\{F_1^{(k)}\}$ converge la distribuţia limită $F(z_1^0)$;

(*ii*) şirul $\{F_2^{(k)}\}$ converge la distribuţia limită $F(z_2^0)$;

(*iii*) şirul de variabile aleatoare $\{h_{12}^{(k)}\}$ tinde în probabilitate la o constantă pozitivă h_{12}^0.

Atunci, dacă există valorile medii şi varianţele $\mathbf{E}z_1^{(k)}$, $\mathbf{E}z_2^{(k)}$, $\mathrm{Var}(z_1^{(k)})$, $\mathrm{Var}(z_2^{(k)})$ inegalităţile

$$\mathbf{E}z_1^{(k)} > \mathbf{E}z_2^{(k)}\,;\ \mathrm{Var}\,(z_1^{(k)}) > \mathrm{Var}\,(z_2^{(k)})$$

sînt satisfăcute şi în cazul asimptotic cînd $k \to \infty$.

Demonstraţie. Deoarece şirul de variabile aleatoare $\{h_{12}^{(k)}\}$ tinde în probabilitate la constanta h_{12}^0, pentru orice $\eta > 0$ avem

$$\lim_{k\to\infty} \{\mathbf{P}(|h_{12}^{(k)} - h_{12}^0| \leqslant \eta)\} = 1$$

deci $h_{12}^0 \in [h_{12}^{(k)} - \eta,\ h_{12}^{(k)} + \eta]$ şi trebuie să existe un k suficient de mare pentru η oricît de mic, astfel încît, h_{12} să ia valoarea $h_{12}^0 \in [h_{12}^{(k)} - \eta,\ h_{12}^{(k)} + \eta]$. Deoarece $h_{12}^{(k)} > 1$ pentru toţi k, urmează că şi $h_{12}^0 > 1$. Teorema de convergenţă a lui Slutsky, generalizată de Cramér [13] în sensul că sînt înlăturate condiţiile de independenţă stochastică ale variabilelor, demonstrează că: dacă şirul de funcţii de distribuţie $\{F_n\}$ ale şirului de variabile aleatoare $\{\zeta_n\}$ tinde la o distribuţie limită $F(x)$ cînd $n \to \infty$ iar şirul de variabile aleatoare $\{\eta_n\}$ converge în probabilitate la constanta c, atunci şirul constituit din funcţiile de distribuţie ale variabilelor $\{\zeta_n \eta_n\}$ tinde la $F\left(\frac{x}{c}\right)$.

Aplicînd această teoremă şirului funcţiilor de distribuţie $\{F_2^{(k)}\}$ şi şirului de variabile aleatoare $\{h_{12}^{(k)}\}$, care îndeplinesc prin ipoteză condiţiile teoremei Slutsky-Cramér, putem afirma că şirul funcţiilor de distribuţie ale şirului de variabile aleatoare $\{h_{12}^{(k)} z_2^{(k)}\}$ tinde la $F\left(\frac{z_2^0}{h_{12}^0}\right)$ pentru $k \to \infty$. Deoarece h_{12}^0 este o constantă independentă de funcţia de distribuţie $F(z_2^0)$, dacă se notează cu $e(h_{12} - h_{12}^0)$ funcţia cumulativă de distribuţie a variabilei h_{12} care este aproape peste tot egală cu h_{12}^0, $F\left(\frac{z_2^0}{h_{12}^0}\right)$ se poate scrie sub forma:

$$F\left(\frac{z_2^0}{h_{12}^0}\right) = F(z_2^0)\, e(h_{12} - h_{12}^0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Media lui $e(h_{12} - h_{12}^0)$ este $h_{12}^0 > 1$ şi varianţa ei este nulă încît,

$$\text{pentru } k \to \infty \begin{cases} \mathbf{E}z_1^{(k)} - \mathbf{E}z_2^{(k)} \to (h_{12}^0 - 1)\mathbf{E}F(z_2^0) > 0 \\ \text{Var}(z_1^{(k)}) - \text{Var}(z_2^{(k)}) \to \{(h_{12}^0)^2 - 1\}\text{Var}(z_2^0) > 0. \end{cases}$$

Să considerăm acum modelul (I.7.20) corespunzător metodei active de tratare a programelor stochastice. Se presupune că mulţimea tripletelor admisibile S_k, $k = 1, 2, \ldots, k_q$ pentru (I.7.20) este identică cu mulţimea acestor triplete pentru modelul corespunzător metodei pasive. Pentru un S_k dat şi o matrice determinată U din mulţimea $\mathcal{U}_0$ a matricelor admisibile se calculează prin metoda descrierii complete toate soluţiile realizabile de bază. Fie I_0 mulţimea indicilor acestor soluţii. Se calculează valorile funcţiei obiectiv pentru toate soluţiile realizabile de bază. Fie $z_1^{(k)}$ (D) cea mai mare dintre aceste valori, adică

$$z_1^{(k)}(\mathrm{D}) = \{\max_{i \in I_0} z_i^{(k)}(\mathrm{D})\} \tag{I.7.90}$$

Simbolul D este folosit pentru a arăta că această valoare este optimă pentru o *matrice determinată* $U \in \mathcal{U}_0$. Deoarece $z_1^{(k)}$ (D) depinde de matricea de alocaţie U se poate defini

$$z_1^{(k)}(A) = [\max_{U \in \mathcal{U}_0} \{\max_{i \in I_0} z_i^{(k)}(\mathrm{D})\}] \tag{I.7.91}$$

care este valoarea maximă a funcţiei obiectiv pentru un S_k dat, pe mulţimea tuturor matricelor de alocaţie admisibile şi a tuturor soluţiilor realizabile de bază corespunzătoare. În sfîrşit, fie $z_1^{(k)}(\mathrm{P})$ valoarea optimă a funcţiei obiectiv definită prin (I.7.77) pentru forma pasivă.

Admitem că mărimile $z_1^{(k)}(\mathrm{A})$, $z_1^{(k)}(\mathrm{D})$ şi $z_1^{(k)}(\mathrm{P})$ au medii şi varianţe mărginite şi strict pozitive.

Teorema XII. Dacă inegalitatea

$$z_1^{(k)}(\mathrm{P}) \geqslant z_1^{(k)}(\mathrm{A}) \geqslant z_1^{(k)}(\mathrm{D}) > 0$$

este satisfăcută pentru toţi $k \in \mathcal{K} = [1, 2, \ldots, k_q]$ şi inegalitatea strictă

$$z_1^{(k)}(\mathrm{P}) > z_1^{(k)}(\mathrm{A}) > z_1^{(k)}(\mathrm{D})$$

este adevărată pentru cel puţin un $k \in \mathcal{K}$ atunci avem

$$\mathbf{E}z_1^{(k)}(\mathrm{P}) > \mathbf{E}z_1^{(k)}(\mathrm{A}) > \mathbf{E}z_1^{(k)}(\mathrm{D}). \tag{I.7.92}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă variabilele aleatoare $h_a^{(k)} \geqslant 1$ și $h_d^{(k)} \geqslant 1$ pentru care avem

$$z_1^{(k)}(\mathrm{P}) = h_a^{(k)} z_1^{(k)}(\mathrm{A})$$

$$z_1^{(k)}(\mathrm{A}) = h_d^{(k)} z_1^{(k)}(\mathrm{D})$$

satisfac cel puțin una din condițiile (*i*), (*ii*), (*iii*) ale teoremei X, atunci

$$\mathrm{Var}\, z_1(\mathrm{P}) > \mathrm{Var}\, z_1(\mathrm{A}) > \mathrm{Var}\, z_1(\mathrm{D}) \qquad \text{(I.7.93)}$$

Demonstrația este analogă cu a teoremei X.

Corolar. Dacă $z_2^{(k)}(\mathrm{P})$, $z_2^{(k)}(\mathrm{A})$ și $z_2^{(k)}(\mathrm{D})$ sînt maximele trunchiate de ordinul întîi, în condiții asemănătoare cu ale teoremei XII, avem

$$\mathbf{E}z_2^{(k)}(\mathrm{P}) > \mathbf{E}z_2^{(k)}(\mathrm{A}) > \mathbf{E}z_2^{(k)}(\mathrm{D}) \qquad \text{(I.7.94)}$$

$$\mathrm{Var}\, z_2(\mathrm{P}) > \mathrm{Var}\, z_2(\mathrm{A}) > \mathrm{Var}\, z_2(\mathrm{D}) \qquad \text{(I.7.95)}$$

Rezultatele stabilite arată că, în anumite condiții, optimele determinate prin metoda activă sînt mai stabile decît cele obținute prin metoda pasivă dacă varianța este considerată ca măsură a stabilității.

O concluzie de ordin practic care se degajă din aceste rezultate este că, avînd de rezolvat o problemă de programare stochastică, soluția „mai bună" în sensul de mai apropiată de acea care se va impune în condițiile reale în care va trebui aplicată se poate obține utilizînd metoda activă de rezolvare a problemei și alegînd o soluție suboptimă, ceea ce echivalează cu o soluție trunchiată. Stabilirea soluției suboptime care are șansa de a fi mai apropiată de soluția optimă a problemei ce se va prezenta în realitate este o problemă legată de informațiile de care dispunem.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

TRANSPORTURI STOCHASTICE

Problemele de transport sau, mai general din punct de vedere al conținutului economic, problemele de tip transport sînt cele a căror modele matematice sînt de forma

$$\sum_j x_{ij} = a_i ; \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j ; \qquad j = 1, \ldots, n \tag{II.1.1}$$

$$g(x) = \min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \tag{II.1.2}$$

cu condiția suplimentară

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j .$$

Caracteristic acestor modele este că matricea formată de coeficienții variabilelor x_{ij} are toate elementele egale cu $+1$, -1 sau zero, încît o problemă de transport poate fi stochastică dacă

— coeficienții c_{ij} ai variabilelor x_{ij} în funcția economică sînt variabile aleatoare sau dacă

— cantitățile de marfă a_i de care dispun depozitele sau cererile b_j în centrele de consum sînt variabile aleatoare. Bineînțeles că se poate admite că atît cererile cît și disponibilul sînt variabile aleatoare. Se pare că acest caz nu a fost încă tratat în literatura de specialitate. Evident că este posibil să presupunem că atît componentele vectorilor a și b cît și elementele matricei costurilor, $C = \|c_{ij}\|$ sînt variabile aleatoare.

Oricare ar fi elementele aleatoare, minimul funcției economice, $g(x)$ este o variabilă aleatoare și scopul urmărit poate fi determinarea valorii medii a acestei variabile sau, dacă informația obținută în acest fel este insuficientă, se poate pune problema determinării funcției ei de repartiție.

Scanned with OKEN Scanner

În acest capitol se tratează cazurile în care c_{ij} sînt variabile aleatoare și acele în care b_j sînt aleatori. Literatura de specialitate insistă mai mult asupra ultimului caz deoarece poate prezenta aspecte mai variate.

§ 1. PROBLEME DE TRANSPORT CU COSTURI ALEATOARE

Să admitem că în problema de transport (II.1.1) — (II.1.2) unele sau toate elementele matricei $C = \|c_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ sînt variabile aleatoare continue. $C = \|c_{ij}\|$ poate fi o matrice a costurilor într-o problemă de transport numai dacă toate elementele ei sînt nenegative încît vom admite că toate variabilele aleatoare c_{ij} sînt nenegative. Matricea C poate fi privită ca un punct aleator în spațiul real dimensional R^{mn}, cu valori în octantul pozitiv al acestui spațiu. Valoarea optimă a funcției $\sum_{ij} c_{ij}x_{ij}$ este o variabilă aleatoare pe care o vom nota cu $g(C)$ deci

$$g(C) = \min \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$$

cu condițiile (II.1.1).

Să presupunem că ne interesează valoarea medie a costului optim al transporturilor necesare aprovizionării a n centre de consum cu o marfă depozitată în m puncte, costurile transporturilor fiind aleatoare adică, se cere $\mathbf{E}g(C)$. Vom lua în considerare cazul în care C este o variabilă discretă și cazul în care C este continuă.

Să admitem că matricea aleatoare C poate lua r valori c^k, $k = 1, \ldots, r$ și că se cunosc probabilitățile p_k corespunzătoare acestor valori. În acest caz problema stochastică de transport generează r probleme deterministice care diferă prin funcțiile economice. Fie x^k soluția optimă a problemei deterministice de transport cu funcția de cost $\sum_{ij} c_{ij}^k x_{ij}$ și $g(c_k)$ minimul acestei funcții cu condițiile (II.1.1), atunci,

$$g(c_k) = \sum_i \sum_j c_{ij}^k x^k \tag{II.1.3}$$

și

$$\mathbf{E}g(C) = \sum_{k=1}^{r} p_k g(c_k). \tag{II.1.4}$$

Dacă se notează cu $\mathbf{E}C = [\mathbf{E}c_{ij}]$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ matricea costurilor medii de transport și cu x^* soluția optimă a pro-

Scanned with OKEN Scanner

blemei de transport cu restricţiile (II.1.1) şi funcţia economică $\sum_{ij} (\mathbf{E}c_{ij})\, x_{ij}$ atunci

$$g(\mathbf{E}C) = \sum_i \sum_j (\mathbf{E}c_{ij})\, x^*.$$

Este uşor de dovedit că

$$\mathbf{E}g(C) \geqslant g(\mathbf{E}C). \qquad \text{(II.1.5)}$$

În adevăr, înlocuind în egalitatea (II.1.4) pe $g(c_k)$ prin valoarea ei dată de (II.1.3) avem

$$\mathbf{E}g(C) = \sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}^k x_{ij}^k. \qquad \text{(II.1.6)}$$

Elementele matricei $\mathbf{E}C$ sînt valorile medii ale elementelor matricelor $c^1, c^2, \ldots c^r$ încît

$$\mathbf{E}c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} p_k c_{ij}^k.$$

Funcţia economică a problemei de transport în care matricea costurilor este $\mathbf{E}C$ se scrie

$$\sum_{ij} \sum_k p_k c_{ij}^k x_{ij}$$

sau ceea ce este acelaşi lucru,

$$\sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}^k x_{ij}. \qquad \text{(II.1.7)}$$

Dacă se notează cu x^* soluţia optimă a acestei probleme, atunci

$$g(\mathbf{E}C) = \sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}^*. \qquad \text{(II.I.18)}$$

Toate problemele deterministice de transport care sînt luate în considerare au acelaşi sistem de restricţii. Deoarece $x^1, \ldots, x^r$ sînt soluţiile optime ale problemelor cu matricele costurilor $c^1, \ldots c^r$, aceste soluţii verifică sistemul de restricţii. Matricea $\bar{x}$ cu elementele $\bar{x}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} p_k x_{ij}^k$ verifică de asemenea acest sistem deoarece elementele ei sînt combinaţii liniare convexe ale elementelor matricelor soluţiei $x^1, \ldots, x^r$. Valoarea funcţiei (II.1.7) pentru soluţia $\bar{x}$ este cel puţin egală cu $g(\mathbf{E}c)$ deoarece $\bar{x}$ nu este obligatoriu soluţia optimă a problemei de transport cu matricea costurilor $\mathbf{E}C$. Atunci avem

$$\sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}^k \sum_k p_k x_{ij}^k \geqslant g(\mathbf{E}C) \qquad \text{(II.1.9)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Membrul stîng al acestei inegalităţi se mai poate scrie astfel

$$\sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}^k \sum_k p_k x_{ij}^k = \sum_k p_k \sum_k \left(\sum_{ij} p_k c_{ij}^k x_{ij}^k\right) =$$

$$= \sum_k p_k \left(\sum_k p_k \sum_{ij} c_{ij}^k x_{ij}^k\right) = \sum_k p_k \mathbf{E}g(C) = \mathbf{E}g(C) \sum_k p_k = \mathbf{E}g(C) \quad \text{(II.1.10)}$$

Înlocuind acest rezultat în relaţia (II.1.9) se obţine inegalitatea (II.1.5). O concluzie practică a acestei inegalităţi este că informaţia obţinută calculînd $g(\mathbf{E}C)$ este o informaţie optimistă adică, presupunînd că vrem să cunoaştem costul mediu al unui program optim de transporturi cu costuri aleatoare şi calculăm $g(\mathbf{E}C)$, obţinem un cost total mai mic decît valoarea medie a costurilor minime.

Să presupunem acum că C este o variabilă aleatoare continuă şi că se cunoaşte funcţia ei de probabilitate $f(c)$ şi distribuţiile marginale $f_{ij}(c)$ în raport cu fiecare variabilă c_{ij}. Fie $x^1 = \|x_{ij}^1\|$ soluţia optimă a problemei de transport pentru o valoare admisibilă, determinată, c^1 a matricei C. Fie u_i^1 şi v_j^1 un sistem de multiplicatori simplex asociaţi acestei soluţii şi

$$\bar{c}_{ij}^1 = c_{ij}^1 + u_i^1 + v_j^1; \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$$

costurile comparative. Se ştie că multiplicatorii simplex u_i^1 $i = 1, \ldots m$ v_j^1; $j = 1, \ldots, n$ pot fi totdeauna determinaţi astfel încît costurile comparative $\bar{c}_{ij}^1$ corespunzătoare valorilor $x_{ij}^1 > 0$ să fie nule. Dacă soluţia x^1 este optimă atunci costurile comparative $\bar{c}_{ij}^1$ corespunzătoare valorilor $x_{ij}^1 = 0$ sînt pozitive. Soluţia optimă fiind o soluţie de bază conţine $m + n - 1$ valori pozitive (admiţînd că este nedegenerată) deci $mn - (m + n - 1)$ dintre componentele ei sînt nule. De aici se deduce că o soluţie realizabilă de bază x este optimă dacă i se pot asocia $mn - m - n + 1$ costuri comparative nenegative. Din modul în care se calculează multiplicatorii u_i şi v_j reiese că $\bar{c}_{ij}$ sînt funcţii liniare de c_{ij}; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ încît dacă c_{ij} sînt variabile, ecuaţiile $\bar{c}_{ij} = 0$ reprezintă hiperplane care determină semispaţii în spaţiul R^{mn}. Fiecărei soluţii realizabile de bază x, i se poate asocia un con convex în R^{mn} cu vîrful în originea spaţiului, mărginit de $mn - m - n + 1$ hiperplane cu ecuaţiile $\bar{c}_{ij} = 0$. Numărul soluţiilor realizabile de bază ale unei probleme de transport este finit şi egal cu $t = C_{mn}^{m+n-1}$ încît spaţiul R^{mn} este acoperit de t conuri convexe $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ cu vîrful în origine. Este uşor de văzut că aceste conuri nu au puncte interioare comune dacă problemea este nedegenerată. O soluţie oarecare x^s, $s = 1, \ldots, t$ este optimă dacă punctul aleator c din R^{mn} aparţine conului Γ_s.

Scanned with OKEN Scanner

Fie g^s, $s = 1, \ldots, t$ valorile funcției economice ale problemei de transport pentru soluția x^s. Valoarea g^s este minimă dacă $c \in \Gamma^s$. Atunci probabilitatea ca minimul $g(C)$ al funcției economice să fie egal cu g^s este egală cu probabilitatea ca x^s să fie soluția optimă sau cu probabilitatea ca c să aparțină conului Γ_s, adică

$$\mathbf{P}[g(C) = g^s] = \mathbf{P}(x^* = x^s) = \mathbf{P}(c \in \Gamma_s) = \int_{\Gamma_s} f(c)dc = p_s.$$

Atunci

$$\mathbf{E}g(C) = \sum_{s=1}^{t} p_s g^s = \sum_{s=1}^{t} \int_{\Gamma_s} g^s f(c)dc. \qquad \text{(II.1.11)}$$

Teoretic, formula (II.1.11) ne dă posibilitatea de a calcula valoarea medie a variabilei aleatoare $g(C)$ practic însă, această formulă este inaplicabilă fiindcă presupune că sînt cunoscute toate soluțiile problemei de transport. Într-o problemă cu matricea 3×5, numărul soluțiilor este 6 435 încît într-o problemă de dimensiuni mari, cum sînt cele din practică, calcularea tuturor soluțiilor chiar pentru mașini electronice cere foarte mult timp. În afară de aceasta, determinarea conului Γ asociat fiecărei soluții comportă rezolvarea unui sistem de $mn - m - n + 1$ inecuații cu $m \times n$ necunoscute. În practică însă apar adeseori condiții care simplifică mult problema, de exemplu, unele costuri sînt constante; costurile aleatoare iau valori în intervale finite încît punctul aleator C aparține unui dreptunghi din spațiul R^{mn} definit de inegalitățile $\underline{c}_{ij} \leqslant c_{ij} \leqslant \bar{c}_{ij}$ etc.

Unele particularizări ale variabilelor c_{ij} pot crea condiții care să îngăduie determinarea funcției de repartiție a variabilei aleatoare $g(C)$. O astfel de particularizare este prezentată de B.Bereanu [1] și [2]. În aceste studii se presupune, în primul rînd, că toate elementele matricei C sînt funcții liniare de o singură variabilă aleatoare $t(\omega)$ apoi se generalizează această ipoteză admițînd că toți c_{ij} sînt funcții liniare de r variabile aleatoare $t_1(\omega), t_2(\omega), \ldots, t_r(\omega)$.

În cele ce urmează vom prezenta rezultatele obținute de B. Bereanu în lucrările citate.

Să considerăm în primul rînd cazul

$$c_{ij} = K^0_{ij} + K'_{ij}\, t(\omega); \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \qquad \text{(II.1.12)}$$

unde K^0_{ij} și K'_{ij} pentru $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ sînt constante nenegative, iar $t(\omega)$ este o variabilă aleatoare continuă nenegativă care ia valori în intervalul finit $[\tau, \tau']$.

În baza acestor ipoteze, pentru toate valorile variabilei aleatoare $t(\omega) \in [\tau, \tau']$, variabilele aleatoare c_{ij} date de relațiile (II.1.12) sînt nenegative. Se presupune că funcția de repartiție $F(z)$ a variabilei $t(\omega)$ este cunoscută. Dacă $t(\omega)$ este considerat ca fiind un parametru $\lambda \in [\tau, \tau']$ se pot determina valorile caracteristice λ_k, $k = 1, \ldots, p$ ale parametrului λ astfel încît pentru $\lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ soluția optimă a problemei de transport să fie matricea x^k. Fie $g(x^k)$

$$g(x^k) = \alpha_k + \lambda\beta_k; \quad k = 1, \ldots, p$$

valoarea optimă a funcției obiectiv pentru $\lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Pentru ca notația să fie simetrică, fie $\tau = \lambda_0$ și

$$g(x^0) = \alpha_0 + \lambda_0 \beta_0$$

valoarea optimă a funcției economice pentru $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ și $\tau' = \lambda_{p+1}$ iar

$$g(x^{p+1}) = \alpha_{p+1} + \lambda_{p+1} \beta_{p+1}$$

valoarea acestei funcții pentru $\lambda \in [\lambda_p, \lambda_{p+1}]$.

Se demonstrează că funcția de repartiție $G(z)$ a variabilei aleatoare $g(C)$ este

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } z < \alpha_0 + \lambda_0\beta_0 \\ F\left(\dfrac{z - \alpha_k}{\beta_k}\right) & \text{dacă } \alpha_k + \lambda_k\beta_k \leqslant z < \alpha_k + \lambda_{k+1}\beta_k \\ 1 & \text{dacă } z \geqslant \alpha_{p+1} + \lambda_{p+1}\beta_{p+1}. \end{cases} \qquad \text{(II.1.13)}$$

Pentru a demonstra relația (II.1.13) vom arăta în primul rînd că dacă într-o problemă de transport atribuim matricei costurilor două valori $c^1 = \| c^1_{ij} \|$ și $c^2 = \| c^2_{ij} \|$ care îndeplinesc condițiile

$$c^1_{ij} \leqslant c^2_{ij} \text{ pentru toți } (i, j) \qquad \text{(II.1.14)}$$

atunci valorile optime ale funcțiilor economice $\sum_i \sum_j c^1_{ij} x_{ij}$ și $\sum_i \sum_j c^2_{ij} x_{ij}$ satisfac relația

$$\sum_i \sum_j c^1_{ij} x^1_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j c^2_{ij} x^2_{ij} \qquad \text{(II.1.15)}$$

unde x^1_{ij} și x^2_{ij} sînt soluțiile optime.

În adevăr, x^1 fiind soluția optimă pentru problema de transport cu matricea costurilor $c^1 = \|c^1_{ij}\|$, avem

$$\sum_i \sum_j c^1_{ij} x^1_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j c^1_{ij} x^2_{ij}. \qquad \text{(II.1.16)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind acum în membrul drept al inegalității (II.1.16) fiecare din coeficienții c_{ij}^1 prin c_{ij}^2 și ținînd seama de relația (II.1.14), avem

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^1 x_{ij}^2 \leqslant \sum_i \sum_j c_{ij}^2 x_{ij}^2. \qquad \text{(II.1.17)}$$

Din relațiile (II.1.16) și (II.1.17) rezultă inegalitatea (II.1.15). Matricea costurilor în problema stochastică de transport, pentru $t(\omega) = \mathfrak{t}$, are elementele $K_{ij}^0 + K_{ij}^1 \mathfrak{t}$. Acestea sînt cele mai mici valori pe care le pot lua variabilele aleatoare $c_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^1\ t(\omega)$ pentru valorile admisibile ale variabilei $t(\omega)$ încît $g(x_0) = \alpha_0 + \lambda_0\beta_0 = \alpha_0 + \mathfrak{t}\beta_0$ este cea mai mică valoare pe care o ia variabila aleatoare $g(C)$. Atunci

$$\mathbf{P}[g(C) \leqslant \alpha_0 + \lambda_0\beta_0] = 0.$$

De asemenea pentru $t(\omega) = \mathfrak{t}'$ matricea costurilor are elementele $K_{ij}^0 + K_{ij}^1\, \mathfrak{t}'$ și valoarea optimă a funcției economice $g(x_{p+1}) = \alpha_{p+1} + \lambda_{p+1}\beta_{p+1} = \alpha_{p+1} + \mathfrak{t}'\beta_{p+1}$ este cea mai mare valoare a acestei funcții în condițiile acceptate. Atunci

$$\mathbf{P}[g(C) \leqslant \alpha_{p+1} + \lambda_{p+1}\,\beta_{p+1}] = 1.$$

Să determinăm acum probabilitatea ca funcția $g(C)$ să ia o valoare mai mică decît un număr real, pozitiv, oarecare z. Valorile pe care le ia funcția $g(C)$ pentru $\mathfrak{t}(\omega) = \lambda_0$, $\mathfrak{t}(\omega) = \lambda_1, \ldots, \mathfrak{t}(\omega) = \lambda_{p+1}$ formează, așa cum s-a arătat mai înainte, un șir crescător deoarece valorile caracteristice ale parametrului λ formează un șir crescător

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{p+1}$$

încît elementele $c_{ij}^k = K_{ij}^0 + K_{ij}^1\, \lambda_k$ pentru toți i și j sînt mai mici decît elementele matricei $c_{ij}^{k+1} = K_{ij}^0 + K_{ij}^1\, \lambda_{k+1}$.

Orice valoare admisibilă z a variabilei aleatoare $g(C)$ este cuprinsă între valorile pe care le ia $g(C)$ pentru două valori caracteristice, consecutive ale parametrului λ, să zicem λ_k și λ_{k+1}, deci

$$g(x_k) = \alpha_k + \lambda_k\beta_k \leqslant z \leqslant g(x_{k+1}) = \alpha_{k+1} + \lambda_{k+1}\,\beta_{k+1} < \alpha_k + \lambda_{k+1}\,\beta_k.$$

Atunci

$$\mathbf{P}[g(C) \leqslant z] = \mathbf{P}(\alpha_k + t\beta_k \leqslant z) = \mathbf{P}\left(t \leqslant \frac{z - \alpha_k}{\beta_k}\right) = F\left(\frac{z - \alpha_k}{\beta_k}\right)$$

Demonstrația dată de B. Bereanu [2] pentru expresia (II.1.13) a funcției $G(z)$ este următoarea:

Scanned with OKEN Scanner

Fie A evenimentul $[\omega|g(C) < z]$ și B_k evenimentul $[\omega|\lambda_k \leqslant t(\omega) < \lambda_{k+1}]$ $k = 1, \ldots, p$. Evenimentul A se poate realiza o dată cu unul oarecare dintre evenimentele B_k încît

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{p} \mathbf{P}(A \mid B_k)\, \mathbf{P}(B_k)$$

iar

$$\mathbf{P}(A \mid B_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_k)}{\mathbf{P}(B_k)}$$

Dacă $z < \alpha_0 + \lambda_0\beta_0$ atunci

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}\{[g(C) < \alpha_0 + \lambda_0\beta_0] \cap [\lambda_k \leqslant \tau(\omega) < \lambda_{k+1}]\} = 0$$

deci $\mathbf{P}(A) = 0$.
Dacă $\alpha_l + \lambda_l \beta_l \leqslant z < \alpha_l + \lambda_{l+1}\beta_l$

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(B_k), \qquad 0 \leqslant k \leqslant l - 1$$

$$\mathbf{P}(A \cap B_l) = \mathbf{P}\left[\omega \mid \lambda_l \leqslant \tau\,(\omega) < \frac{z - \alpha_l}{\beta_l}\right]$$

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = 0 \qquad l + 1 \leqslant k \leqslant p$$

încît

$$\mathbf{P}(A) = F\left(\frac{z - \alpha_l}{\beta_l}\right).$$

Dacă $z \geqslant \alpha_p + \beta_p\lambda_{p+1}$

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(B_k),\ 0 \leqslant k \leqslant p$$

încît $\mathbf{P}(A) = 1$.
Valoarea medie a funcţiei $g(C)$ este

$$\mathbf{E}g(C) = \sum_{k=0}^{p} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\alpha_k + \lambda\beta_k)\, dF(\lambda). \tag{II.1.18}$$

Să considerăm acum cazul cînd elementele matricei C sînt funcţii liniare de r variabile aleatoare. Vom avea

$$c_{ij} = K_{ij}^0 + \sum_{s=1}^{r} K_{ij}^s t_s(\omega)\,; \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \tag{II.1.19}$$

unde: K_{ij}^s, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $s = 0, \ldots, r$ sînt constante nenegative

$t_s(\omega)$, $s = 1, \ldots, r$ sînt variabile aleatoare continue cu valori în intervalele finite $[\tau_s, \tau_s']$.

Se admite că pentru toate valorile variabilelor aleatoare $t_s(\omega) \in [\tau_s, \tau_s']$ variabilele aleatoare c_{ij} definite prin egalităţile (II.1.19) sînt nenegative şi că densitatea mixtă de probabilitate $\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$ a variabilelor $t_s(\omega)$ este cunoscută.

Dacă $t_s(\omega)$ sînt consideraţi parametri care iau valori în intervalele $[\tau_s, \tau_s']$ şi se rezolvă problema de transport cu matricea costurilor $[K_{ij}^0 + \sum_s K_{ij}^s \tau_s]$ $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ se găseşte o soluţie optimă $x' = [x_{ij}']$ $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Înlocuind τ_s prin t_s, costurile comparative $\bar{c}_{ij}^1 = c_{ij}^1 + u_i^1 + v_j^1$ asociate soluţiei x^1 devin funcţii liniare de parametrii t_s, $s = 1, \ldots, r$ încît se pot scrie sub forma

$$\bar{c}_{ij}^1 = \gamma_{ij}^0 + \sum_{s=1}^{r} \gamma_{ij}^s t_s.$$

Matricea x^1 rămîne optimă pentru toate valorile parametrilor t_s, $s = 1, \ldots, r$ care îndeplinesc condiţiile

$$\gamma_{ij}^0 + \sum_{s=1}^{r} \gamma_{ij}^s t_s \geqslant 0 \text{ pentru } i \in I_1,\ j \in J_1 \qquad \text{(II.1.20)}$$

$$\tau_s \leqslant t_s \leqslant \tau' \quad \text{pentru } s = 1, \ldots, r. \qquad \text{(II.1.21)}$$

S-a notat cu I_1 mulţimea indicilor i şi cu J_1 mulţimea indicilor j corespunzători elementelor nule ale matricei soluţiei x^1.

Condiţiile (II.1.20) determină un polyhedru convex P_1 în spaţiul r-dimensional R^r şi (II.1.21) un dreptunghi T în acelaşi spaţiu. Fie $\pi_1 = P_1 \cap T$. Matricea x^1 este optimă pentru toate punctele $t(t_1, \ldots, t_r) \in \pi_1$. Valoarea funcţiei obiectiv pentru $t \in \pi_1$ este o funcţie liniară de t_s, $s = 1, \ldots, r$ pe care o vom nota cu

$$g^1 = \alpha_0^1 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^1 t_s. \qquad \text{(II.1.22)}$$

Pentru orice punct $t \in T - \pi_1$ cel puţin una din condiţiile (II.1.20) nu este satisfăcută şi metoda de rezolvare a problemelor parametrice de transport dă posibilitatea de a determina o nouă soluţie optimă x^2 căreia îi corespunde un polyhedru convex π_2 fără puncte interioare comune cu P_1, dacă toate soluţiile optime ale problemei sînt nedegenerate. După un număr finit de schimbări de bază se obţin polyhedrele π_l, $l = 1, \ldots, q$ caracterizate prin proprietatea că pentru

Scanned with OKEN Scanner

orice punct $t(t_1, \ldots, t_r) \in P_l$ soluţia optimă x^l este aceeaşi şi funcţia economică are valoarea minimă

$$g^l = \alpha_0^l + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^l t_s. \tag{II.1.23}$$

Mulţimea polyhedrelor P_l, $l = 1, \ldots, q$ mai satisface condiţia

$$\bigcup_{l=1}^{q} \pi_l = T. \tag{II.1.24}$$

Funcţia de repartiţie $G(z)$ a variabilei aleatoare $g(C)$ este

$$G(z) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\pi_l(z)} \varphi(\zeta) d\zeta \tag{II.1.25}$$

unde

$$\pi_l(z) = \pi_l \cap [t(\omega) g^l \leqslant z]. \tag{II.1.26}$$

Media variabilei aleatoare $g(C)$ este

$$\mathbf{E}g(C) = \sum_{l=1}^{q} \int_{\pi_l} g^l \varphi(\zeta) d\zeta. \tag{II.1.27}$$

Exemplul I. Să se determine probabilitatea ca transporturile necesare pentru aprovizionarea centrelor de consum B_1, B_2, B_3 şi B_4 cu 25, 5, 15 şi 23 unităţi dintr-un produs care se poate procura în cantităţile 20, 18 şi 30 unităţi din depozitele A_1, A_2, A_3 să coste mai puţin de 360 lei. Costurile transporturilor pe unitatea de produs sînt înregistrate în tabelul 23. S-a notat cu t variabila aleatoare cu valori

(23)

20 − θ 2 + 5t	5 − t	θ 4 + t		20 u_i 2 − 3t
5 + θ 4 + 2t	−5 4	−8 − θ 5 + t	8 − t	18 0
6	5 7 − 2t	7 4 + t	23 5	30 1
25 v_j −4 − 2t	5 −4	15 −5 − t	23 − 6	

Scanned with OKEN Scanner

în intervalul $[-0,2;\ 1,5]$ și densitatea de probabilitate $f(z) = \frac{1}{5,083}\left(\frac{z^2}{3}+1\right)$. Observăm că pentru toți $t \in [-0,2\,;\ 1,5]$ costurile $c_{ij} = K^0_{ij} + K^1_{ij}\,t\,;\ i = 1, 2, 3\,;\ j = 1, \ldots, 4$ sînt nenegative deși nu sînt îndeplinite condițiile $K^1_{ij} > 0$ pentru toți i și j și deci variabila t poate lua și valori negative. Această observație conduce la concluzia că matricea $c(t) = \|K^0_{ij} + K^1_{ij}\,t\|\,;\ i = 1, 2, 3\,;\ j = 1, \ldots, 4$ poate fi o matrice a costurilor de transport pentru $t \in [-0,2\,;\ 1,5]$.

Celula haşurată în tabel înseamnă că depozitul A_1 nu poate aproviziona centrul de consum B_4. Tabelul 23 s-a completat calculînd soluția optimă pentru $t = 0$. Această soluție x^1 este optimă pentru toate valorile parametrului t care satisfac sistemul de inecuații:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= c_{12} + u_1 + v_2 = 3 - 4t \geqslant 0\\
c_{13} &= c_{13} + u_1 + v_3 = 1 - 3t \geqslant 0\\
\bar{c}_{24} &= c_{24} + u_2 + v_4 = 2 - t \geqslant 0\\
\bar{c}_{31} &= c_{31} + u_3 + v_1 = 3 - 2t \geqslant 0\\
\bar{c}_{32} &= c_{32} + u_3 + v_2 = 4 - 2t \geqslant 0.\\
-0,2 &\leqslant t \leqslant 1,5.
\end{aligned} \qquad \text{(II.1.28)}$$

Rezolvînd sistemul (II.1.28) se determină $\pi_1 = [-0,2\,;\ 0,33]$. Pentru $t \equiv \pi_1$ avem $g^1 = 263 + 125t$.

Dacă $t > 0,33$ costul comparativ $\bar{c}_{13}$ devine negativ. Se găsește o nouă soluție optimă x^2 luînd $x_{13} = 0$ și formînd ciclul marcat în tabelul 23.

Soluția x^2 este înregistrată în tabelul 24.

(24)

12 − θ 2 + 5t	−θ 5 − t	8 4 + t		20 u_i 0
13 + θ 4 + 2t	−5 − θ 4	5 + t	8 − t	18 −2 + 3t
6	7 − 2t	7 4 + t	23 5	30 0
25 v_j −2 − 5t	15 −2 − 3t	15 −4 − t	23 − 5	

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează costurile comparative asociate soluției x^2 și se determină intervalul de variație al parametrului t pentru care această soluție este optimă rezolvînd sistemul

$$3 - 4t \geqslant 0\,;\ -1 + 3t \geqslant 0\,;\ 1 + 2t \geqslant 0\,;\ 4 - 5t \geqslant 0\,;\ 5 - 5t \geqslant 0\,;$$

$$0{,}33 \leqslant t \leqslant 1{,}5$$

Găsim $\pi_2 = [0{,}33\,;\ 0{,}75]$ și $g^2 = 271 + 101t$.

În tabelul 24 este înregistrat și ciclul care se formează pentru determinarea soluției corespunzătoare valorilor parametrului $t > 0{,}75$. Aplicînd aceeași metodă se obțin intervalele de variație ale parametrului și valorile optime ale funcției obiectiv:

$$\pi_3 = [0{,}75\,;\ 0{,}80] \quad \text{și} \quad g^3 = 286 + 81t$$

$$\pi_4 = [0{,}80\,;\ 1{,}50] \quad \text{și} \quad g^4 = 314 + 46t.$$

Pentru $t = -0{,}2$ costul minim al transporturilor este $g^1(-0{,}2) = 238$
Pentru $t = 1{,}5$ costul minim al transporturilor este $g^4(1{,}5) = 383$..
Funcția de repartiție $G(z)$ a variabilei $g(C)$ este

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z < 238 \\ F\left(\dfrac{z - \alpha_k}{\beta_k}\right) & \text{pentru } \alpha_k + \lambda_k\beta_k \leqslant z < \alpha_k + \lambda_{k+1}\beta_k \\ 1 & \text{pentru } z \geqslant 383 \end{cases}$$

S-a cerut probabilitatea ca transporturile să coste mai puțin de 360 lei. Pentru calculul acestei probabilități trebuie alcătuit tabelul 25 din

(25)

k	λ_k	α_k	β_k	$\alpha_k + \lambda_k\,\beta_k$	$\alpha_k + \lambda_{k+1}\,\beta_k$
0	$-0{,}2$	263	125	238	304,(6)
1	$\frac{1}{3}$	271	101	304,(6)	346,75
2	0,75	286	81	346,75	350,8
3	0,80	314	46	350,8	383
4	1,50				

care găsim $350{,}8 < 360 < 383$; $\alpha_k = 314$; $\beta_k = 46$ și $\dfrac{z - \alpha_k}{\beta_k} = \dfrac{360 - 314}{46} = 1$

atunci, $G(1) = P(g(C) < 360) = \dfrac{1}{5{,}083}\displaystyle\int_{-0{,}2}^{1}\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)dx = 0{,}43.$

Scanned with OKEN Scanner

Costul mediu al transporturilor este

$$\mathbf{E}g(C) = \frac{1}{5{,}083}\left[\int_{-0,2}^{1/3}(263+125\,x)\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx + \right.$$

$$+\int_{1/3}^{0,75}(271+101x)\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx + \int_{0,75}^{0,80}(286+81x)\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx +$$

$$\left. +\int_{0,80}^{1,50}(314+46x)\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx\right] = 331{,}95 \text{ lei.}$$

Valoarea medie a variabilei aleatoare t este $\mathbf{E}t = 0{,}72$ încît $\mathbf{E}c_{11} = 2 + 5 \times 0{,}72$. Similar, calculînd toate costurile medii şi rezolvînd problema de transport cu aceste costuri se găseşte $g(\mathbf{E}C) = 329{,}12$ încît relaţia $\mathbf{E}g(C) \geqslant g(\mathbf{E}C)$ se verifică.

Exemplul II. Producţia de grîu provenită din patru cooperative agricole de producţie trebuie transportată pentru depozitare la trei silozuri. Cantităţile de grîu care se găsesc la cele patru cooperative sînt respectiv de 70, 50, 100 şi 80 vagoane iar capacitatea silozului S_1 este de 140 vagoane, a silozului S_2 de 60 vagoane şi a celui de al treilea S_3 de 100 vagoane. Planificarea transporturilor are scopul de a realiza însilozarea cu o cheltuială minimă. Unele costuri sînt aleatoare fiindcă în momentul planificării nu se ştie dacă vor fi disponibile vagoanele de cale ferată necesare şi deci există riscul de a suporta unele cheltuieli suplimentare. Datele problemei sînt prezentate în tabelul 26. p şi q sînt variabile aleatoare cu densitatea mixtă de probabilitate $\varphi(\zeta,\eta) = \frac{1}{420}(2pq+1)$. Variabila p ia valori în intervalul $[0,5]$ şi q în intervalul $[2,6]$. Tabelul 26 conţine şi o soluţie realizabilă de bază x^1 pentru care sînt calculaţi multiplicatorii simplex u_i şi v_j. Observăm că s-a ales o soluţie care nu foloseşte transporturi cu costuri aleatoare. x^1 este optimă pentru toate valorile parametrilor p şi q care satisfac condiţiile:

$$\bar{c}_{11} = 2q \geqslant 0\,;\ \bar{c}_{22} = -1+p \geqslant 0\,;\ \ \bar{c}_{33} = -2+q \geqslant 0 \quad \text{(II.1.29)}$$

(celelalte preţuri comparative nu depind de p şi q şi sînt pozitive). Soluţia sistemului de inecuaţii (II.1.29) este $p \geqslant 1$; $q \geqslant 2$. În fig. 19 s-a reprezentat dreptunghiul T determinat de condiţiile:

$$0 \leqslant p \leqslant 5\,; \qquad 2 \leqslant q \leqslant 6.$$

Scanned with OKEN Scanner

(26)

		70	70 u_i
$4 + 2q$	8	5	1
40	0 ----------	$10 - \theta$	50
5	$3 + p$	6	0
100			100
6	8	$5 + q$	-1
	$60 - \theta$ ----------	$20 + \theta$	80
7	4	6	0
140	60	100	
v_j -5	-4	-6	

$\theta = 10$

Dreptele $p = 1$, $p = 5$, $q = 2$, $q = 6$ limitează domeniul π_1 pe care x^1 este soluția optimă. În fig. 19 domeniul π_1 este dreptunghiul ABCD. Dacă $p < 1$ costul comparativ c_{22} devine negativ, x_{22} intră în bază și se găsește soluția din tabelul 27. Costurile comparative care condiționează optimalitatea acestei soluții sînt date în același tabel.

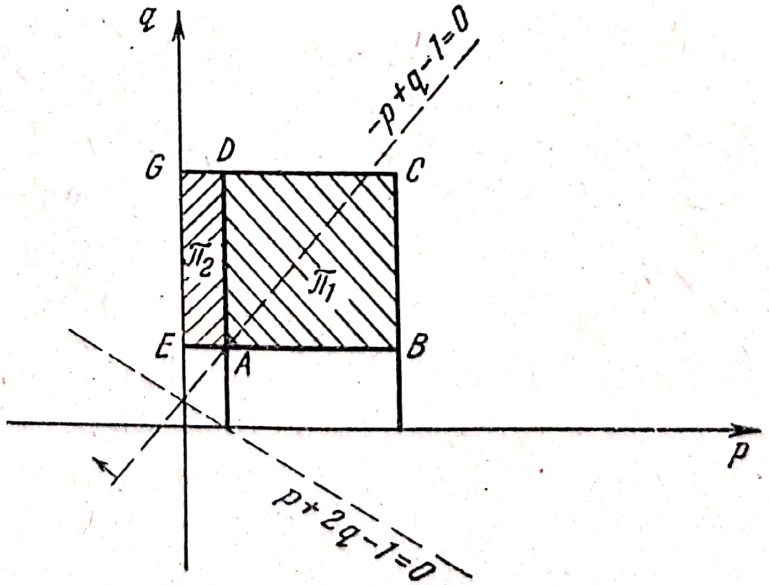

Fig. 19

$4 + 2q$	8	70 5	70 -5
40 5	10 $3 + p$	6	50 $-5 - p$
100 6	8	$5 + q$	100 $-6 - p$
7	50 4	30 6	80 -6
140 p	60 2	100 0	

Soluţia x^2 din tabelul 27 este optimă dacă punctul aleator (p, q) aparţine domeniului π_2 care în fig. 19 este ADEG. Observăm că $\pi_1 \cup \pi_2 = T$.

Costul minim al transportului pentru $(p, q) \in \pi_1$ este $g^1 = 1570$ şi pentru $(p, q) \in \pi_2$ este $g^2 = 1560 + 10p$. Funcţia de repartiţie $G(z)$ a costului minim este

$$G(z) = \iint\limits_{\pi(z)} \varphi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta.$$

Să calculăm probabilitatea ca suma cheltuită pentru transportul grîului să fie mai mică de 1570 lei. Pentru aceasta vom determina $\pi_1(z)$ şi $\pi_2(z)$, $z = 1570$

$$\pi_1(z) = \pi_1 \cap [g^1 < z] = \pi_1 \cap [1570 < 1570] = \varnothing$$

$$\pi_2(z) = \pi_2 \cap [g^2 < z] = \pi_2 \cap [1560 + 10p < 1570] = \pi_2 \cap [p < 1] = \pi_2.$$

Atunci

$$\mathbf{P}(g < 1570) = \int_0^1 \int_2^6 \frac{1}{420} (2\zeta\eta + 1) d\zeta d\eta \simeq 0{,}05.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea medie a costului este

$$\mathrm{E}g(z) = \iint\limits_{\pi_1} 1570 \frac{1}{420}(2\zeta\eta + 1)d\zeta d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{\pi_2} (1560 + 10\zeta)\frac{1}{420}(2\zeta\eta + 1)d\zeta d\eta = 1569{,}825 \text{ lei.}$$

§ 2. TRANSPORTURI CU CERERI ALEATOARE

Se pare că problema transporturilor cu cereri aleatoare a fost formulată și rezolvată pentru prima oară de G.B. Dantzig [5] în 1955 și că în 1956 a fost aplicată, cu unele modificări, de G.B.Dantzig și A.R. Ferguson [8] la alocarea avioanelor pe rutele aeriene. Alte modele de formulare și rezolvare a problemei de transport cu cereri aleatoare aparțin lui C.M. Shetty [13] și A.C. Wiliams [15]. Algoritmele folosite pentru rezolvarea diferitelor modele se bazează pe metoda de rezolvare a problemelor de transport cu capacități limitate sau pe algoritmul lui C.M. Shetty pentru probleme deterministice de transport cu costuri neliniare sau pe algoritmul Dantzig-Wolfe de descompunere a programelor liniare adaptat de H.C. Wiliams [15] pentru probleme de transport. Aceste algoritme nu au fost expuse în lucrările de specialitate publicate pînă în prezent la noi încît fără a insista asupra justificării lor, ele vor fi expuse acolo unde va fi necesar.

În problemele de transport cu cereri aleatoare se admite că:

— matricea costurilor de transport $c = [c_{ij}]$ $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ este formată din elemente constante;

— componentele a_i; $i = 1, \ldots, m$ ale vectorului a care reprezintă disponibilul de marfă în depozitele (sau centrele producătoare) i, sînt constante;

— componentele b_j, $j = 1, \ldots, n$, ale vectorului b care reprezintă cererile în centrele de consum j sînt variabile aleatoare cu distribuții de probabilitate cunoscute.

Pentru o primă formulare a problemei de transport cu cereri aleatoare admitem că se cunosc funcțiile densităților de probabilitate ale fiecărei cereri aleatoare b_j. Dacă y_j reprezintă totalul mărfurilor primite în centrul de consum j de la toate sursele de aprovizionare $i = 1, \ldots, m$ probabilitatea ca cererea în j să fie cuprinsă în intervalul $y_j; y_j + dy_j$ se notează cu dp_j și este $dp_j = f_j(y_j)\, dy_j$. Funcțiile $f_j(y_j)$ sînt astfel definite încît

$$f_j(y_j) = 0 \quad \text{pentru} \quad y_j \leqslant 0 \qquad \text{(II.2.1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să vedem acum care poate fi obiectivul unei probleme de transport cu cereri aleatoare. În problemele deterministice, soluția căutată este programul de transporturi $x^0 = [x_{ij}^0]$ care asigură satisfacerea cererilor în centrele de consum respectînd posibilitățile de livrare ale fiecărei surse și corespunzînd unui cost minim al totalului transporturilor. Dacă acest obiectiv ar fi menținut și în problemele de transport cu cereri aleatoare soluția optimă ar fi aceea care ar satisface totalul cererilor minime încît problema nu prezintă interes decît dacă admitem că nesatisfacerea unei cereri comportă o penalizare care se exprimă prin pierderea unei sume de bani. Acceptarea acestei ipoteze este logică. O altă posibilitate este de a considera că obiectivul urmărit este maximizarea beneficiului realizat prin satisfacerea cererilor aleatoare din care se scade costul total al transporturilor. Dacă se notează cu $\Phi_j(C_j\ y_j)$ funcția care exprimă beneficiul realizat prin satisfacerea cererii în centrul de consum j, obiectivul problemei va fi minimizarea funcției

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_j \mathbf{E}\Phi_j(C_j y_j) \qquad \text{(II.2.2)}$$

(în care operatorul **E** arată că se ia valoarea medie a beneficiului $\Phi_j(C_j y_j)$ cu condițiile

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,; \qquad i = 1,\ \ldots,\ m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j\,; \qquad j = 1,\ \ldots,\ n \\ &x_{ij} \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.2.3)}$$

unde y_j este cererea în centrul de consum j.

Intervalul de variație a cererii y_j, care poate fi $[0, +\infty]$ se poate împărți în subintervale prin punctele d_{hj}, $h = 1, \ldots, K_j$. Numărul punctelor de diviziune poate fi diferit pentru fiecare j, de aceea s-a notat acest număr cu K_j. Admitem că

$$0 = d_{1j} < d_{2j} < \ldots < d_{K_{j-1},j} < d_{K_j j} = \infty \qquad \text{(II.2.4)}$$

cererea necunoscută y_j în centrul de consum $j = 1, \ldots, n$, este

$$y_j = y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{K_j j} = \sum_{h=1}^{K_j} y_{hj} \qquad \text{(II.2.5)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant y_{1j} \leqslant d_{1j} = b_{1j} \\ 0 &\leqslant y_{2j} \leqslant d_{2j} - d_{1j} = b_{2j} \\ 0 &\leqslant y_{3j} \leqslant d_{3j} - d_{2j} = b_{3j} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &\leqslant y_{K_j j} \leqslant d_{K_j j} - d_{K_j-1,\,j} = b_{K_j j} \end{aligned} \tag{II.2.6}$$

Fie p_{hj}, $h = 1, \ldots, K_j$ probabilitatea ca cererea să fie cuprinsă în intervalul $[d_{h-1,j},\ d_{hj}]$. Deoarece s-a admis că sînt cunoscute funcţiile densităţilor de probabilitate $f_j(y_j)$, avem

$$p_{hj} = \mathbf{P}(d_{h-1,j} < y_j < d_{hj}) = \int_{d_{h-1,j}}^{d_{h,j}} f_j(y_j)\, dy_j = F_j(d_{hj}) - F(d_{h-1,j}). \tag{II.2.7}$$

Să admitem acum că întreaga cantitate de marfă y_j primită în centrul de consum j este împărţită în loturi. Primul lot conţine b_{1j} unităţi, al doilea b_{2j} unităţi etc. Să notăm cu γ_{ij} probabilitatea ca o unitate oarecare din primul lot să fie vîndută adică probabilitatea ca y_j să fie mai mare decît b_{ij}. Deoarece $b_{1j} = d_{1j} = 0$, $\mathbf{P}(y_j > b_{1j}) = \mathbf{P}(y_j \geqslant 0) = 1$ încît

$$\gamma_{1j} = 1 = \sum_{j=1}^{K_j} p_{hj}. \tag{II.2.8}$$

Probabilitatea ca prima unitate din al doilea lot să fie vîndută este

$$\mathbf{P}(y_j > b_{1j}) = p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + \ldots + p_{K_j j}.$$

Probabilitatea ca toate unităţile din al doilea lot să fie vîndute este

$$\mathbf{P}(y_j > b_{2j}) = p_{2j} + p_{3j} + \ldots + p_{K_j j}$$

încît, în medie, probabilitatea γ_{2j} ca o unitate oarecare din al doilea lot să fie vîndută este

$$\gamma_{2j} = \frac{1}{2} p_{1j} + \sum_{h=2}^{K_j} p_{hj} \tag{II.2.9}$$

Analog avem

$$\begin{aligned} \gamma_{3j} &= \frac{1}{2} p_{2j} + \sum_{h=3}^{K_j} p_{hj} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{K_j j} &= \frac{1}{2} p_{K_j-1,\,j}. \end{aligned} \tag{II.2.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie C_j beneficiul realizat prin vînzarea unei unităţi de marfă în centrul de consum j. Beneficiul mediu realizat prin satisfacerea cererii y_j în acest punct de consum este

$$\mathrm{E}\Phi_j(C_j y_j) = C_j(\gamma_{1j}y_{1j} + \gamma_{2j}y_{2j} + \ldots + \gamma_{K_j j}y_{K_j j}). \quad \text{(II.2.11)}$$

Observăm că, oricare ar fi funcţiile $f_j(y_j)$, mărimile γ_{hj} sînt descrescătoare. Să presupunem pentru un moment că se cere vectorul Y cu componentele $y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{K_j j}$ care maximizează funcţia (II.2.11) cu condiţiile (II.2.5) şi (II.2.6). Dacă y_j este o constantă b_j această problemă este un program liniar deterministic. Deoarece coeficienţii variabilelor în funcţia obiectiv, adică γ_{hj}, $h = 1, \ldots, K_j$ sînt descrescători, soluţia optimă se găseşte atribuind variabilei f_{1j} cea mai mare valoare pe care o poate lua respectînd restricţiile, adică y_{1j} este egal cu cel mai mic dintre numerele b_{1j} şi b_j. Avem

$$y_{1j} = \min(b_{1j}, b_j).$$

Dacă $b_j = b_{1j}$, $y_{1j} = b_j$ şi toate celelalte componente sînt nule. Dacă $b_j > b_{1j}$ atunci $y_{1j} = b_{1j}$ şi se atribuie variabilei y_{2j} valoarea

$$y_{2j} = \min(b_{2j}, b_j - b_{1j}).$$

Continuînd cu acelaşi procedeu se construieşte soluţia optimă care prezintă următoarele caracteristici:

variabila $y_{hj} = 0$ dacă $y_{h-1j} < b_{h-1,j}$ şi $y_{hj} \geqslant 0$ dacă $y_{h-1,j} = b_{h-1,j}$.

Această observaţie va fi utilizată în cele ce urmează.

Modelul problemei de transport cu cereri aleatoare, în ipotezele acceptate, se scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{h=1}^{K_j} y_{hj} = 0; \qquad j = 1, \ldots, n \quad \text{(II.2.12)}$$

$$0 \leqslant y_{hj} \leqslant b_{hj} \quad h = 1, \ldots, K_j; \; j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} C_j \sum_{h=1}^{K} \gamma_{h\,j\,hj} \quad \text{(II.2.13)}$$

unde $K = \max K_j$, deoarece am admis că numărul punctelor de diviziune nu este obligatoriu același pentru toate intervalele în care iau valori cererile aleatoare. Modelul (II.2.12) — (II.2.13) nu corespunde modelului unei probleme clasice de transport încît nu poate fi rezolvat folosind algoritmul specific acestor probleme. Pentru ca totuși acest algoritm să fie utilizabil se va modifica modelul (II.2.12) — — (II.2.13) astfel încît să fie adus la forma dorită. Reamintim că o problemă deterministică de transport scrisă schematic are forma următoare

Ecuații		$x_{11}x_{12}\ldots x_{1n}$;	$x_{21}x_{22}\ldots x_{2n}$; ... ; $x_{m1}x_{m2}\ldots x_{mn}$	Constante
linie	1	1 1 ... 1		$= a_1$
	2		1 1 ... 1	$= a_2$
	.		. . . . .	
	m		1 1 ... 1	$= a_m$
coloană	1	1	1 1	$= b_1$
	2	1	1 1	$= b_2$
	.	.	. .	
	n	1	1 1	$= b_n$

Din această schemă reținem că fiecare variabilă apare în model de două ori cu coeficientul $+1$, o dată într-o ecuație linie și o dată într-o ecuație coloană. Pornind de la această observație se vor face modificările sistemului (II.2.12) pentru a fi adus la forma unui sistem de restricții cu caracteristicile sistemelor din problemele deterministice de transport.

În primul rînd limitările superioare ale variabilelor y_{hj} pot fi înlăturate din sistemul (II.2.12) deoarece soluția care minimizează funcția economică (II.2.13) trebuie să maximizeze funcțiile (II.2.11) și s-a arătat mai sus că acest maxim se obține cu respectarea condițiilor $y_{hj} \leqslant b_{hj}$ datorită faptului că coeficienții γ_{hj} sînt descrescători.

În al doilea rînd coeficienții variabilelor y_{hj} sînt egali cu -1; însă, dacă se face schimbarea de variabile

$$-y_{hj} = y'_{hj}, \quad y'_{hj} \leqslant 0 \tag{II.2.14}$$

coeficienții noilor variabile în sistemul (II.2.12) sînt egali cu $+1$. Se observă apoi că lipsesc din model ecuațiile corespunzătoare însumă-

Scanned with OKEN Scanner

rilor pe linii pentru variabilele y'_{hj} deci modelul trebuie completat cu ecuaţiile

$$\sum_{j=1}^{n} y'_{hj} + y_{h,\,n+1} = 0\,; \qquad h = 1,\ \ldots,\ K \tag{II.2.15}$$

cu condiţia ca aceste ecuaţii să nu modifice mulţimea soluţiilor problemei. Dacă se impune variabilelor artificiale $y_{h,\,n+1}$ condiţia ca

$$\sum_{h=1}^{K} y_{h,\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{II.2.16}$$

atunci cele K ecuaţii (II.2.15) nu modifică soluţiile sistemului iniţial deoarece y'_{hj} sînt nepozitivi şi se pot găsi totdeauna numere pozitive $y_{h,\,n+1}$ care să satisfacă (II.2.15). Aceste numere vor satisface totdeauna condiţia (II.2.16) deoarece modelul (II.2.12), prin primul grup de ecuaţii, conţine cerinţa ca tot disponibilul de marfă să fie utilizat pentru satisfacerea cererii. Mai departe, în ecuaţiile

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,;\ i = 1,\ \ldots,\ m$$

se adaugă variabilele artificiale $x_{i,\,n+1}$ care reprezintă cantităţi de marfă neexpediate de sursele $i = 1,\ \ldots,\ m$. Deoarece fiecare sursă trebuie să expedieze întregul disponibil, variabilele $x_{i,\,n+1}$ trebuie să ia valori nule în soluţia optimă. Acest lucru se asigură asociind variabilelor $x_{i,\,n+1}$ în funcţia economică, coeficienţii $c_{i,\,n+1} = M$ unde M este un număr pozitiv oricît de mare. Cu aceste modificări, modelul (II.2.12) — (II.2.13) este înlocuit prin modelul

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,\,n+1} = a_i\,; \quad i = 1,\ \ldots,\ m\\
&\sum_{j=1}^{n} y'_{hj} + y_{h,\,n+1} = 0\,; \quad h = 1,\ \ldots,\ K\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{h=1}^{K} y'_{hj} = 0\,; \quad j = 1,\ \ldots,\ n\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{i,\,n+1} + \sum_{h=1}^{K} y_{h,\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i
\end{aligned} \tag{II.2.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_{ij} \geqslant 0,\ y'_{h,n+1} \leqslant 0,\quad y_{h,n+1} \geqslant 0$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} C_j \sum_{h=1}^{K} \gamma_{hj}\, y'_{hj} + M \sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1}$$

cu condiţiile suplimentare

$$y'_{hj} \geqslant -\, b_{hj}\,; \qquad h = 1, \ldots, K_{j-1}$$

A patra ecuaţie din (II.2.17) este ecuaţia (II.2.16) la care s-a adăugat $\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1}$ care este nulă deoarece în soluţia optimă $x_{i,n+1} = 0$ pentru $i = 1, \ldots, m$ aşa cum s-a mai precizat. Sub această formă problema corespunde modelului problemei deterministice de transport şi tabelul de calcul folosit pentru aplicarea algoritmului are $(m + k)$ linii şi $(n + 1)$ coloane. Coloana $(n + 1)$ poate să nu figureze în acest tabel deoarece variabilele din această coloană sînt $x_{i,n+1}$ care au valori nule şi $y_{h,n+1}$ care aparţin bazei pentru ca ecuaţiile (II.2.15) să nu restrîngă mulţimea soluţiilor sistemului iniţial.

Astfel tabelul de calcul folosit pentru rezolvarea problemei (II.2.17) este de forma tabelului 28.

Prin Γ_{hj} s-au notat costurile $C_j\, \gamma_{hj}$ asociate variabilelor y_{hj}. Deoarece numărul K_j în care este împărţit b_j diferă de la o variabilă aleatoare la alta şi $K = \max K_j$, este posibil ca unora dintre pătratele situate în ultimele linii ale tabelului să nu le corespundă nici o variabilă.

Pentru determinarea unei soluţii iniţiale pot fi folosite diferite metode. Una dintre acestea este următoarea: se rezolvă problema deterministică de transport

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \mathbf{E} b_j \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ \min z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} \end{gathered} \qquad \text{(II.2.18)}$$

cu condiţia suplimentară $\sum_i a_i = \sum_j \mathbf{E} b_j$.

Scanned with OKEN Scanner

(28)

x_{11} c_{11}	x_{12} c_{22}		x_{1n} c_{1n}	a_1
x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}		x_{2n} c_{2n}	a_2
x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}		x_{mn} c_{mn}	a_m
y'_{11} Γ_{11}	y'_{12} Γ_{12}		y'_{1n} Γ_{1n}	
y'_{21} Γ_{21}	y'_{22} Γ_{22}		y'_{2n} Γ_{2n}	
y'_{K1} Γ_{K1}	y'_{K2} Γ_{K2}		y'_{Kn} Γ_{Kn}	
0	0		0	

Dacă această condiție nu este satisfăcută se modifică intervalele de variație ale cererilor astfel încît să se obțină egalitatea disponibilului total cu valoarea medie a cererii totale. Soluția optimă a problemei (II.2.18) se înregistrează în „tabelul principal" al tabelului 28 adică în primele m linii.

Totalul transporturilor din prima coloană a tabelului principal este $\mathbf{E}b_1$. Se completează soluția inițială a problemei (II.2.17) luînd $y_{11} = \min(b_{11}, \mathbf{E}b_1)$. Deoarece b_{11} este cu certitudine mai mic decît $\mathbf{E}b_1$, avem $y_{11} = b_{11}$; apoi se ia $y_{21} = \min(b_{21}, \mathbf{E}b_1 - b_{11})$ etc. Diviziunea $d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{K_1 1}$ trebuie să fie suficient de fină încît și ultima valoare nenulă a variabilei y_{t_1} să fie egală cu limita ei superioară. Analog se completează soluția inițială și pentru celelalte coloane.

Se știe că în problemele de transport cu variabile mărginite [6] o soluție realizabilă este optimă dacă satisface următoarele condiții:

a) toate variabilele care nu aparțin bazei sînt fie la limita inferioară fie la limita superioară;

b) $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j \geqslant 0$ dacă $x_{ij} \notin B$ și este la limita inferioară;

c) $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j \leqslant 0$ dacă $x_{ij} \notin B$ şi este la limita superioară ;

u_i şi v_j fiind multiplicatori simplex determinaţi prin condiţiile: $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j = 0$ pentru toate variabilele $x_{ij} \in B$. Deoarece în modelul (II.2.17) variabilele y'_{kj} sînt negative, testul de optimalitate va avea semnele inversate. Multiplicatorii simplex u_i şi u'_h asociaţi liniilor $i = 1, \ldots, m$; $h = 1, \ldots, K$ şi multiplicatorii v_j, $j = 1, \ldots, n + 1$ (deocamdată admitem că nu a fost ştearsă coloana $n + 1$) se calculează din sistemul

$$\begin{aligned} c_{ij} + u_i + v_j &= 0 \quad \text{pentru } x_{ij} \in B \\ \Gamma_{hj} + u'_h + v_j &= 0 \quad \text{pentru } y'_{hj} \in B \\ u'_h + v_{n+1} &= 0 \quad \text{pentru } y_{h,n+1} \in B. \end{aligned} \tag{II.2.19}$$

Costurile asociate variabilelor $y_{h,n+1}$ pentru $h = 1, \ldots, K$ sînt nule deoarece $c_{n+1} = 0$. Toate variabilele $y_{h,n+1}$ aparţin bazei încît se poate lua arbitrar $v_{n+1} = 0$. Din $u'_h + v_{n+1} = 0$ rezultă că atunci avem şi $u'_h = 0$ pentru $h = 1, \ldots, K$.

Sistemul (II.2.19) se reduce astfel la

$$\begin{aligned} c_{ij} + u_i + v_j &= 0 \quad \text{pentru } x_{ij} \in B \\ \Gamma_{hj} \quad + v_j &= 0 \quad \text{pentru } y'_{hj} \in B \end{aligned}$$

iar testul de optimalitate este

$$\begin{aligned} c_{ij} + u_i + v_j &\geqslant 0 \quad \text{pentru } x_{ij} \notin B \\ \Gamma_{hj} \quad + v_j &\leqslant 0 \quad \text{pentru } y'_{hj} = 0 \text{ şi } y'_{hj} \notin B \\ \Gamma_{hj} \quad + v_j &\geqslant 0 \quad \text{pentru } y'_{hj} = -b_{hj} \text{ şi } y'_{hj} \notin B. \end{aligned}$$

Observaţie. În tabelele de calcul se obişnuieşte ca în locul valorilor y'_{hj} să se înscrie y_{hj} deci valorile tuturor variabilelor sînt pozitive.

Exemplul I. Să se rezolve problema de transport cu cererile aleatoare $0 < b_1 \leqslant 80$; $0 < b_2 \leqslant 95$; $0 < b_3 \leqslant 130$; $0 < b_4 \leqslant 35$ pentru care probabilităţile p_{hj} sînt date în tabelul 29. Există trei depozite cu disponibil $a_1 = 80$, $a_2 = 90$, $a_3 = 90$ şi matricea costurilor este

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

(29)

h	b_1		b_2		b_3		b_4	
	Interval	p_{h1}	Interval	p_{h2}	Interval	p_{h3}	Interval	p_{h4}
1	0—40	0	0—55	0	0— 70	0	0—15	0
2	40—50	0,4	55—65	0,2	70— 80	0,1	15—25	0,5
3	50—60	0,1	65—75	0,3	80— 90	0,2	25—35	0,5
4	60—70	0,1	75—85	0,3	90—100	0,2	>35	0
5	70—80	0,4	85—95	0,2	100—110	0,2		
6	>80	0	>95	0	110—120	0,2		
7					120—130	0,1		
8					>130	0		

Din tabelul 29 se calculează $\mathbf{E}b_1 = 60$; $\mathbf{E}b_2 = 75$; $\mathbf{E}b_3 = 100$; $\mathbf{E}b_4 = 25$.

Condiția $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{E}b_j$ este îndeplinită încît problema deterministică de transport cu cererile egale cu 60, 75, 100 și 25 admite o soluție. În tabelul 30 s-a înregistrat soluția inițială.

(30)

60 — 3	0 — 1 — 6	20 — 0 — 8	— 2 — 6	80 — —8
5	7	65 — 6	25 — 4	90 — —6
4	75 — 0 — 2	15 + 0 — 3	5	90 — —3
60 — 5	75	100 — 0	25 — 20	

Calculînd multiplicatorii simplex şi $c_{ij} + u_i + v_j$ pentru $x_{ij} \notin B$ se constată că soluţia nu este optimă şi că se îmbunătăţeşte dacă x_{12} intră în bază cu valoarea $\theta = 20$.

După această modificare se obţine soluţia optimă pe care o vom înregistra direct în tabelul problemei stochastice. În primul rînd însă se calculează costurile $\Gamma_{hj} = C_j \gamma_{hj}$. Se presupune că $C_j = 3$ pentru $j = 1, \ldots, 4$. Atunci avem

$$\Gamma_{11} = 3 \times 1 = 3; \qquad \Gamma_{14} = 3\left(\frac{1}{2}\,0{,}1 + 0{,}4\right) = 1{,}35$$

$$\Gamma_{12} = 3\left(\frac{1}{2}\,0{,}4 + 0{,}6\right) = 2{,}4; \qquad \Gamma_{15} = 3\left(\frac{1}{2}\,0{,}4 + 0\right) = 0{,}6$$

$$\Gamma_{13} = 3\left(\frac{1}{2}\,0{,}1 + 0{,}5\right) = 1{,}65; \qquad \Gamma_{16} = 0.$$

Celelalte costuri se calculează analog. Rezultatele sînt date în tabelul 31.

(31)

h \ j	Γ_{h1}	Γ_{h2}	Γ_{h3}	Γ_{h4}
1	3	3	3	3
2	2,4	2,7	2,85	2,25
3	1,65	1,95	2,40	0,75
4	1,35	1,05	1,80	0
5	0,6	0,3	1,20	
6	0	0	0,60	
7			0,15	
8			0	

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 0 (32)

				u_i
$60+\theta$ / 60	$20-\theta$ / 120	160	120	80 / −99
88	140	65 / 120	25 / 80	90 / −79
100	$55+\theta$ / 40	$35-\theta$ / 60	100	90 / −19
40 | / 60	55 | / 60	70 | / 60	15 | / 60	
10 | / 48	10 | / 54	10 | / 57	10 | / 45	
10 | / 33	10 | / 39	10 | / 48	(14) / 15	
θ / (66) / 27	0 / 21	10 | $-\theta$ / (−7) / 36	0	
(51) / 12	6	24		
(39) / 0	0	12		
		3		
v_j	39	−21	−41	−1

Se observă că Γ_{hj} sînt mărimi descrescătoare. Pentru ca să nu lucrăm cu numere zecimale vom înmulţi atît elementele matricei $c = \|c_{ij}\|$ cît şi ale matricei $\Gamma = \|\Gamma_{hj}\|$ cu numărul 20. După ce trecem în tabelul 32 soluţia optimă a problemei deterministice, completăm în prima coloană valorile variabilei y_{h1} astfel: $y_{11} = 40$ marginea superioară a primului interval, $y_{21} = 10$ marginea superioară a celui de al doilea interval şi $y_{31} = 10$. Deoarece

$$\sum_{h=1}^{3} y_{h1} = 40 + 10 + 10 = 60 = \mathbf{E}b_1 .$$

Scanned with OKEN Scanner

celelalte variabile din prima coloană iau valori nule; y_{11}, y_{21} și y_{31} nu aparțin bazei și sînt la limita superioară. Procedînd la fel și pentru celelalte coloane se obține o soluție inițială. Deoarece toți y_{h1} sînt la limita superioară în această soluție și problema trebuie să aibă $m + n$ variabile în bază, luăm arbitrar $y_{42} = 0$ ca variabilă în bază. Atunci din ecuația

$$\Gamma_{42} = v_2 = 0$$

se obține $v_2 = -\Gamma_{42} = -21$. Ceilalți multiplicatori se calculează ca în problemele obișnuite de transport. Aplicăm testul de optimalitate și înregistrăm în tabel numai valorile pentru care nu sînt îndeplinite condițiile de optimalitate.

Alegem variabila pentru care condiția de optim este mai grav încălcată; aceasta este y'_{42}. Îi atribuim valoarea θ pe care trebuie să o adăugăm și variabilei din „tabelul principal" x_{11}. În continuare ciclul format se citește din tabel. Făcînd modificările necesare obținem o nouă soluție care are tot 5 variabile în bază încît menținem pe $y'_{42} = 0$ ca variabilă în bază. Tabelele 33 și 34 conțin iterația 1 și 2 care conduc la soluția optimă pentru $\theta = 0$ adică, în fond, schimbă numai poziția variabilei folosite pentru completarea soluției de bază.

Se ia $\theta = 0$ și considerînd $y'_{34} = 0$ ca variabilă în bază se recalculează multiplicatorii. Se constată că sînt îndeplinite toate condițiile de optimalitate a acestei baze. Comparînd cererea medie cu soluția optimă se constată că în centrele de consum 2 și 3 transporturile se fac la nivel egal cu cererea medie, punctul 1 este aprovizionat peste cererea medie și 3 sub acest nivel.

Problema alocării avioanelor pe rute constituie, din punct de vedere matematic, o generalizare a modelului (II.2.12)—(II.2.13). Din punct de vedere practic importanța acestei probleme constă în faptul că este aplicabilă cu mici modificări în cazurile în care se cere:

— repartizarea unui număr de vehicule (tramvaie, troleibuze, autocamioane, mașini agricole) în diferite puncte cu scopul de a satisface o cerere aleatoare de servicii;

— distribuirea unor loturi de piese care pot fi executate, cu productivitate diferită, de mai multe mașini, scopul urmărit fiind de asemenea satisfacerea unor cereri aleatoare de produse finite etc.

În toate cazurile care se pot include în acest tip de probleme trebuie să fie îndeplinite unele condiții printre care menționăm:

— funcțiile de densitate ale cererilor aleatoare sînt cunoscute;

— beneficiul realizat depinde atît de costurile de producție (sau transport) cît și de realizările bănești legate de satisfacerea cererii, cu alte cuvinte, o cerere nesatisfăcută implică o penalizare sau este

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 1 (33)

70 + θ 60	10 − θ 120	160	120	80 −99
100	140	65 120	25 80	90 −79
80	65 + θ 40	25 − θ 60	100	90 −19

40 | 60	55 | 60	70 | 60	15 | 60
10 | 48	10 | 54	10 | 57	10 | 45
10 | 33	10 | 39	10 | − θ 48	(14) 15
10 | 27	0 21	36	0
θ (51) 12	6	24	
(39) 0	0	12	
		3	
39	−21	−41	−1

socotită ca o pierdere, de exemplu, dacă treieratul cerealelor recoltate pe un anumit teren nu se execută în timpul prescris din cauză că numărul mașinilor de treier este insuficient, această abatere atrage o penalizare care trebuie să fie exprimată ca un cost asociat unității de servicii refuzate;

— obiectivul problemei studiate trebuie să fie alegerea unui program care să asigure maximizarea beneficiului sau minimizarea pierderilor totale.

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 2 (34)

80 60	120	160	120	80 −48
100	140	65 − 0 120	25 + 0 80	90 −79
80	75 − 0 40	15 + 0 60	100	90 −19

40 | 60	55 | 60	70 | 60	15 | 60
10 | 48	10 | 54	10 | 57	10 | 45
10 | 33	10 | 39	⑦ 48	⑭ 0 15
10 | 27	0 − 0 21	36	0
10 12	6	24	
0	0	12	
		3	
−12	−21	−41	−1

În cele ce urmează vom expune condițiile esențiale de care s-a ținut seama în alcătuirea modelului matematic al problemei de alocare a avioanelor. S-au luat în considerare patru tipuri de avioane cu caracteristici diferite în ceea ce privește capacitatea de transport (număr de locuri), viteză, confort etc. Se știe că dispunem de un număr dat de avioane din fiecare tip și că acestea pot fi utilizate pe cinci rute aeriene. Sînt cunoscute de asemenea : costul unui bilet de călătorie pe fiecare rută, numărul mediu de ore de zbor care poate fi executat în cursul unei luni de fiecare tip de avion pe fiecare traseu, costul

Scanned with OKEN Scanner

transportului a 100 pasageri pe fiecare rută deservită de fiecare din cele patru tipuri de avioane (în acest cost sînt incluse salariile echipajului, costul benzinei etc.) Se admite că pierderea rezultată din refuzarea unui călător, refuz pricinuit de lipsa de locuri, este egală cu prețul unui bilet de călătorie pe ruta pe care a fost solicitat biletul. Se mai cunoaște, de asemenea și distribuția cererii de transport pe fiecare rută. Pentru exemplificare, în tabelul 35 se dă distribuția cererii pe ruta I. Cererile sînt înregistrate luînd ca unitate cererea pentru 100 bilete de călătorie.

(35)

Ruta	Cereri de transport (în sute)	Probabilitatea cererii	Probabilitatea ca cererea să egaleze sau să depășească pragul d_{i1}
I	$200 = d_{11}$ $220 = d_{21}$ $250 = d_{31}$ $270 = d_{41}$ $300 = d_{51}$	$0{,}2 = p_{11}$ $0{,}05 = p_{21}$ $0{,}35 = p_{31}$ $0{,}2 = p_{41}$ $0{,}2 = p_{51}$	$1{,}0 = \gamma_{11}$ $0{,}8 = \gamma_{21}$ $0{,}75 = \gamma_{31}$ $0{,}4 = \gamma_{41}$ $0{,}2 = \gamma_{51}$

Numerele γ_{hj} reprezintă acum probabilitatea ca numărul locurilor disponibile să fie cel puțin egal cu cererea încît se calculează cu formula

$$\gamma_{tj} = \sum_{h=t}^{K_j} p_{hj}$$

Se folosesc următoarele notații:

Indicii

$i = 1, \ldots m-1$ se referă la tipul avionului alocat pe o rută;
$i = m$ pasageri refuzați;
$j = 1, \ldots, n-1$ ruta pe care se face o alocare de avioane;
$j = n$ avion nefolosit (excedentar).

Constante:

a_i reprezintă numărul avioanelor de tip i;
p_{ij} — capacitatea de transport (în sute de pasageri) pe lună pentru un avion de tip i folosit pe ruta j. Prin definiție se ia $p_{mj} = 1$;
c_{ij} — costul (în mii dolari) de folosire a unui avion de tip i pe ruta j în timp de o lună; c_{mj} pierderea per 100 pasageri refuzați;
C_j — costul unui bilet de călătorie pe ruta j.

Scanned with OKEN Scanner

Variabile leatoare:

b_j — cererea de bilete (în sute) pe ruta j în decurs de o lună;

Necunoscute: x_{ij} — numărul avioanelor de tip i folosite pe ruta j; x_{mj} este numărul de pasageri (în sute) refuzați

y_{hj} — creșterea cererii pe ruta j.

Cu aceste notații, modelul problemei de alocare a avioanelor este următorul

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i \neq m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_{ij} = \sum_{h=1}^{r} y_{hj} \quad (j \neq n) \qquad \text{(II.2.20)}$$

$$0 \leqslant y_{hj} \leqslant b_{hj}$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \left[R_0 - \sum_{i=1}^{n} C_j \sum_{h=1}^{r} \gamma_{hj} y_{hj} \right] \qquad \text{(II.2.21)}$$

unde $b_{hj} = d_{hj} - d_{h-1,j}$ arată numărul de unități ale subintervalelor în care a fost împărțit intervalul finit în care este cuprinsă cererea b_j. De exemplu, din tabelul 35, avem $b_{11} = 200$; $b_{21} = 220 - 200 = 20$, $b_{31} = 30$; $b_{41} = 20$ și $b_{51} = 30$. Cererea aleatoare pe ruta I este deci exprimată astfel

$$b_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51}$$

cu condițiile:

$$0 \leqslant y_{11} \leqslant 200;\ 0 \leqslant y_{21} \leqslant 20;\ 0 \leqslant y_{31} \leqslant 30;\ 0 \leqslant y_{41} \leqslant 20;$$
$$0 \leqslant y_{51} \leqslant 30$$

iar venitul mediu pe această rută, dacă $C_1 = 13$, este

$$\mathbf{E}\,\Phi_1(C_1 y_{h1}) = C_1(\gamma_{11} y_{11} + \gamma_{21} y_{21} + \gamma_{31} y_{31} + \gamma_{41} y_{41} + \gamma_{51} y_{51}) =$$
$$= 13(y_{11} + 0{,}8 y_{21} + 0{,}75\, y_{31} + 0{,}4 y_{41} + 0{,}2 y_{51}).$$

R_0 din funcția (II.2.21) este o constantă care reprezintă venitul realizat în cazul cînd toate cererile sînt satisfăcute. Din această sumă se scade venitul total mediu încît paranteza exprimă pierderea medie de venit. Adăugînd la aceasta cheltuielile de exploatare, $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ se obține costul mediu al întregii operații. Acest cost trebuie minimizat

Scanned with OKEN Scanner

prin alegerea planului de alocare a avioanelor și a nivelului de satisfacere a cererii pe fiecare rută.

Problema deterministică corespunzătoare valorilor medii ale cererilor de transport pe fiecare rută are modelul

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} = a_i \; ; \; i \neq m \\ \sum_{i=1}^{m-1} p_{ij}\, x_{ij} = \mathbf{E} b_j \; ; \; j \neq n \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ \min \; z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \; .\end{gathered} \tag{II.2.22}$$

care este identic cu modelul problemei de distribuire a sarcinilor, (vezi [12] cap. IV) privită ca o generalizare a problemelor de transport. Tabelul folosit în rezolvarea acestor probleme este de forma

(36)

x_{11} p_{11} c_{11}	x_{12} p_{12} c_{12}		x_{1n} 0 0	a_1
x_{21} p_{21} c_{21}	x_{22} p_{22} c_{22}		x_{2n} 0 0	a_2
x_{m1} 1 c_{m1}	x_{m2} 1 c_{m2}		x_{2n} 0 0	a_m
b_1	b_2		b_n	

Tabelul folosit pentru rezolvarea problemei stochastice (II.2.20)—(II.2.21) mai conține r linii în care pătratele sînt de forma

y_{hj} -1 $-C_j \gamma_{hj}$	sau	v'_{hj} 1 $C_j \gamma_{hj}$

Scanned with OKEN Scanner

dacă se înlocuiesc variabilele y_{hj} prin y'_{hj} definite astfel încît

$$y_{hj} = -y'_{hj},\ y'_{hj} \leqslant 0;\ h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Algoritmul folosit de G.B. Dantzig pentru rezolvarea problemei (II.2.20)—(II.2.21) constă din următoarele etape:

Etapa I. Se determină soluția optimă a problemei (II.2.22) și se atribuie variabilelor y_{hj} valori compatibile cu restricțiile (II.2.20). În acest mod se obține o soluție realizabilă a problemei stochastice de transport. Pentru ca această soluție să fie o soluție de bază trebuie ca $(m + n - 2)$ dintre variabilele x_{ij} și y_{hj} care iau valori nenule în soluția dată să fie socotite ca variabile din bază. O cale simplă pentru alegerea variabilelor din bază este următoarea: pentru primele m linii se consideră un $x_{ij} > 0$, oarecare, ca variabilă din bază; pentru fiecare coloană ultimul y_{hj} este considerat ca variabilă din bază.

Etapa II. Se calculează multiplicatorii simplex u_i și v_j rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} c_{ij} + u_i + p_{ij}v_j &= 0 \qquad \text{pentru toți } x_{ij} \in B \\ C_j\gamma_{hj} - v_j &= 0 \qquad \text{pentru toți } y_{hj} \in B. \end{aligned} \tag{II.2.23}$$

Sistemul (II.2.23) conține $(m + n - 2)$ ecuații corespunzătoare celor $m + n - 2$ variabile din bază și $(m + n - 2)$ necunoscute u_i și v_j.

Etapa III. Se calculează costurile comparative $\bar{c}_{ij}$ și $\bar{c}'_{hj}$ cu formulele:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &= c_{ij} + u_i + p_{ij}v_j \\ \bar{c}'_{hj} &= C_j\gamma_{hj} \qquad - v_j \end{aligned} \tag{II.2.24}$$

Soluția considerată este optimă dacă satisface următoarele condiții:

a) toate variabilele care nu aparțin bazei sînt fie la limita superioară fie la limita inferioară;

b) pentru toate variabilele x_{ij} și y_{hj} care nu aparțin bazei și sînt *la limita inferioară*, $\bar{c}_{ij}$ și $\bar{c}'_{hj}$ definiți de egalitățile (II.2.24) *sînt pozitivi*;

c) pentru toate variabilele x_{ij} și y_{hj} care nu aparțin bazei și sînt *la limita superioară*, $\bar{c}_{ij}$ *și* $\bar{c}'_{hj}$ *sînt negativi.*

Dacă cel puțin una din condițiile (b) sau (c) nu este satisfăcută soluția poate fi îmbunătățită încît se trece la

Etapa IV. Fie (r,s) indicii variabilei căreia îi corespunde cel mai mare cost comparativ $\bar{c}_{ij}$ sau $\bar{c}'_{hj}$ (în valoare absolută) pentru care condiția (b) sau (c) nu este satisfăcută. Soluția se îmbunătățește astfel:

Scanned with OKEN Scanner

Cazul 1. Dacă x_{rs} (sau y_{rs}) *nu este la limita superioară și dacă* $\bar{c}_{rs} < 0$ (sau $\bar{c}'_{rs} < 0$), se înlocuiește x_{rs} prin $x_{rs} + \theta$ (sau y_{rs} prin $y_{rs} + \theta$).

Cazul 2. Dacă x_{rs} (sau y_{rs}) *nu este la limita inferioară și dacă* $\bar{c}_{rs} > 0$ (sau $\bar{c}'_{rs} > 0$) se înlocuiește x_{rs} prin $x_{rs} - \theta$ (sau y_{rs} prin $y_{rs} - \theta$).

În ambele cazuri θ este un număr nenegativ care se determină ulterior. Modificarea variabilei x_{rs} se compensează modificînd *numai variabilele care aparțin bazei* și astfel încît restricțiile (II.2.20) să fie satisfăcute. Mărimea θ se determină punînd condiția ca soluția obținută în urma modificărilor să fie o soluție realizabilă adică toate variabilele să fie pozitive și toți $y_{hj} \leqslant b_{hj}$. Fie θ^* cea mai mare valoare a lui θ pentru care soluția modificată este realizabilă. Dacă pentru $\theta = \theta^*$ una sau mai multe dintre variabilele de bază ajung la limita superioară sau inferioară, una oarecare dintre aceste variabile va fi considerată că nu mai aparține bazei iar variabila x_{rs} devine variabilă de bază. În acest mod s-a construit o nouă soluție realizabilă de bază și se reia aplicarea algoritmului începînd de la etapa II.

Notă: Testul de optimalitate a unei soluții este formulat prin condițiile (a) (b) și (c) din etapa III. Pentru aplicarea acestui test, variabilele x_{ij} sînt considerate ca fiind și ele mărginite. Metoda de îmbunătățire a soluției dată în etapa IV se justifică astfel:

Dacă o variabilă x_{ij} sau y_{hj} care nu aparține bazei este înlocuită prin

$$x_{ij} \pm \theta \quad \text{sau} \quad y_{hj} \pm \theta, \quad \theta \geqslant 0$$

iar celelalte variabile care nu aparțin bazei rămîn nemodificate și variabilele din bază sînt ajustate în așa fel încît restricțiile problemei să fie satisfăcute, atunci costul mediu al operației, z, devine egal cu z', care are expresia

$$z' = z \pm \theta \bar{c}_{ij} \quad \text{sau} \quad z' = z \pm \theta \bar{c}'_{hj}. \tag{II.2.25}$$

Din (II.2.25) se deduce cu ușurință că dacă x_{ij} (sau y_{hj}) este la limita superioară și c_{ij} (sau $\bar{c}'_{hj}$) este pozitiv, z' este mai mic decît z dacă x_{ij} (sau y_{hj}) descrește cu o valoare pozitivă θ; de asemenea, dacă x_{ij} (sau y_{hj}) este la limita inferioară și $\bar{c}_{ij}$ (sau $\bar{c}'_{hj}$) este negativ, costul mediu al operației se micșorează dacă x_{ij} (sau y_{hj}) crește cu o valoare pozitivă θ.

Exemplul II. O companie de transporturi aeriene dispune de 10 avioane de tipul A și de 8 avioane de tipul B. Aceste avioane pot fi folosite pentru deservirea a trei rute aeriene pe care numărul biletelor de călătorie solicitate în decurs de o lună este aleator. Din informațiile de care dispunem s-au scos concluziile înfățișate în tabelul 37. Costul unui bilet de călătorie pe ruta 1 este $C_1 = 15$, pe ruta 2 —

Scanned with OKEN Scanner

(37)

Ruta	Numărul de bilete solicitate (în sute)	Probabilitatea cererii (λ_{hj})	Probabilitatea ca cererea să egaleze sau să depășească pragul d_{ij}	Cererea medie—aproximativ (în sute)
1	$200 = d_{11}$ $220 = d_{21}$ $250 = d_{31}$ $270 = d_{41}$ $300 = d_{51}$	$0,2 = \lambda_{11}$ $0,05 = \lambda_{21}$ $0,35 = \lambda_{31}$ $0,2 = \lambda_{41}$ $0,2 = \lambda_{51}$	$1,0 = \gamma_{11}$ $0,80 = \gamma_{21}$ $0,75 = \gamma_{31}$ $0,40 = \gamma_{41}$ $0,20 = \gamma_{51}$	250
2	$150 = d_{12}$ $170 = d_{22}$ $180 = d_{32}$ $200 = d_{42}$ $210 = d_{52}$ $240 = d_{62}$	$0,05 = \lambda_{12}$ $0,15 = \lambda_{22}$ $0,15 = \lambda_{32}$ $0,25 = \lambda_{42}$ $0,2 = \lambda_{52}$ $0,2 = \lambda_{62}$	$1,0 = \gamma_{12}$ $0,95 = \gamma_{22}$ $0,80 = \gamma_{32}$ $0,65 = \gamma_{12}$ $0,40 = \gamma_{52}$ $0,20 = \gamma_{62}$	200
3	$40 = d_{13}$ $50 = d_{23}$ $60 = d_{33}$ $65 = d_{43}$ $70 = d_{53}$	$0,1 = \lambda_{13}$ $0,2 = \lambda_{23}$ $0,3 = \lambda_{33}$ $0,2 = \lambda_{43}$ $0,2 = \lambda_{53}$	$1,0 = \gamma_{13}$ $0,9 = \gamma_{23}$ $0,7 = \gamma_{33}$ $0,4 = \gamma_{43}$ $0,2 = \gamma_{53}$	60

$C_2=10$ și pe ruta 3—$C_3 = 8$. Pe baza acestor date se calculează costurile $C_j\ \gamma_{hj}$ din tabelul 38.

(38)

Intervalul h	Ruta 1		Ruta 2		Ruta 3	
	b_{h1}	$C_1\ \gamma_{h1}$	b_{h2}	$C_2\ \gamma_{h2}$	b_{h3}	$C_3\ \gamma_{h3}$
1	200	$C_1 = 15$	150	$C_2=10$	40	$C_3 = 8$
2	20	$0,8\ C_1 = 12$	20	$0,95C_2= 9,5$	10	$0,9C_3 = 7,2$
3	30	$0,75C_1 = 11,25$	10	$0,80C_2= 8$	10	$0,7C_3 = 5,6$
4	20	$0,4\ C_1 = 6$	20	$0,65C_2= 6,5$	5	$0,4C_3 = 3,2$
5	30	$0,2\ C_1 = 3$	10	$0,40C_2= 4$	5	$0,2C_3 = 1,6$
6	×	×	30	$0,20C_2= 2$	×	×

Scanned with OKEN Scanner

Problema deterministică de transport (II.2.22) pentru datele numerice din exemplul de care ne ocupăm se poate rezolva folosind tabelul 39.

Iteraţia 0

(39)

	Ruta 1	Ruta 2	Ruta 3	Avioane nefolosite	a_i u_i
Avion tip A	$6+\frac{5}{4}0$ $p_{ij}=24$ $c_{ij}=20$	$4-\frac{5}{4}0$ 20 18	18 16	0 0	10 −608
Avion tip B	0 25 18	4−0 30 15	4 15 12	0 0	8 −900
Cereri nesatisfăcute	106−550 1 15	0+550 1 10	1 8	0 0	*** −39,5
b_j	250	200	60	***	
v_j	24,5	59,2	59,2		

Numerele p_{ij}; $i=1,2$; $j=1,2,3$ reprezintă numărul de pasageri (în sute) care pot fi transportaţi de un avion de tip i pe ruta j în curs de o lună; $p_{3j}=1$ pentru $j=1,2,3$ deoarece linia a treia din tabelul 39 conţine numărul cererilor nesatisfăcute, $p_{i4}=0$ pentru $i=1,2,3$ deoarece coloana a patra a tabelului conţine avioanele neutilizate. Numerele c_{ij}; $i=1,2$; $j=1,2,3$ sînt costurile de exploatare a unui avion de tip i pe ruta j; c_{3j}; $j=1,2,3$ reprezintă costul unui bilet de călătorie pe ruta j; c_{i4}; $i=1,2,3$ sînt nule deoarece un avion neutilizat nu implică nici o cheltuială. Costurile c_{ij} $i=1,\ldots,4$; $j=1,2,3$ sînt exprimate luînd ca unitate 100.

Soluţia iniţială care figurează în tabelul 39 s-a determinat astfel: s-a ales cel mai mic c_{ij}; $i=1,2$, $j=1,2,3$ adică $c_{23}=12$; variabilei x_{23} i s-a atribuit cea mai mare valoare compatibilă cu condiţiile

Scanned with OKEN Scanner

impuse de a doua ecuaţie-linie $\sum_j x_{2j} = 8$ şi a treia ecuaţie-coloană, $\sum_i p_{i3} x_{i3} = 60$ adică

$$x_{23} = \min \left[8, \frac{60}{15}\right] = \frac{60}{15} = 4.$$

În acest fel coloana a treia este satisfăcută şi se şterge din tabel. Se continuă în acelaşi mod construirea soluţiei pentru tabelul rămas după suprimarea coloanei a treia. Deoarece numărul variabilelor din bază trebuie să fie $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ vom considera şi $x_{32} = 0$ ca făcînd parte din bază.

Calculul multiplicatorilor u_i şi v_j. Multiplicatorii simplex u_i şi v_j asociaţi soluţiei iniţiale se calculează din sistemul de ecuaţii

$$\begin{array}{ll} c_{11} + u_1 + p_{11} v_1 = 0 & 20 + u_1 + 24 v_1 = 0 \\ c_{12} + u_1 + p_{12} v_2 = 0 & 18 + u_1 + 20 v_2 = 0 \\ c_{22} + u_2 + p_{22} v_2 = 0 & 15 + u_2 + 30 v_2 = 0 \\ c_{23} + u_2 + p_{23} v_3 = 0 & 12 + u_2 + 15 v_3 = 0 \\ c_{31} + u_3 + p_{31} v_1 = 0 & 15 + u_3 + v_1 = 0 \\ c_{32} + u_3 + p_{32} v_2 = 0 & 10 + u_3 + v_2 = 0. \end{array} \qquad \text{(II.2.26)}$$

Acest sistem este aproape triunghiular în sensul că se poate rezolva exprimînd toate variabilele în funcţie de una dintre ele aleasă ca parametru. De exemplu, alegînd pe u_3 ca parametru avem:

$$v_1 = -15 - u_3\,;\quad v_2 = -10 - u_3\,;\quad u_2 = 285 + 30\,u_3\,;$$
$$v_3 = -\frac{1}{5}(99 + 10\,u_3)\,;\quad u_1 = 340 + 24\,u_3.$$

Înlocuind u_1 şi v_2 în ecuaţia a doua a sistemului (II.2.26), avem

$$18 + 340 + 24\,u_3 - 200 - 20\,u_3 = 0\,;\quad u_3 = -39{,}5.$$

Fiind cunoscut u_3, se calculează cu uşurinţă valorile celorlalţi multiplicatori. Aceste valori sînt înregistrate în tabelul 39.

Testul de optimalitate. Pentru a stabili dacă soluţia găsită este optimă se calculează costurile comparative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i + p_{ij} v_j$. Dacă $\bar{c}_{ij} \geqslant 0$ pentru toţi $x_{ij} \notin B$, soluţia este optimă. Pentru exemplul studiat avem:

$$\bar{c}_{13} = 16 - 608 + 18 \times 59{,}2 = 473{,}6$$
$$\bar{c}_{21} = 18 - 900 + 25 \times 24{,}5 = -269{,}5$$
$$\bar{c}_{33} = 8 - 39{,}5 + 18 \times 59{,}2 = 1034{,}1.$$

Soluţia nu este optimă deoarece $\bar{c}_{21} < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea soluției îmbunătățite. Se atribuie variabilei x_{21} valoarea θ. Toate variabilele din bază trebuie modificate astfel încît unitățile linie și coloană să rămînă satisfăcute. Dacă se notează cu Δx_{ij} variațiile variabilelor, aceste variații vor fi obligate să satisfacă următoarele condiții :

— pentru verificarea ecuațiilor linie

$$\Delta x_{11} + \Delta x_{12} = 0$$
$$\Delta x_{22} + \Delta x_{23} = -\theta$$
$$\Delta x_{31} + \Delta x_{32} = 0$$

— pentru verificarea ecuațiilor coloană (II.2.27)

$$\begin{aligned} 24\,\Delta x_{11} + \quad \Delta x_{31} \quad &= -25\theta \\ 20\,\Delta x_{12} + 30\Delta x_{22} + \Delta x_{32} &= 0 \\ 15\,\Delta x_{23} \quad &= 0. \end{aligned}$$

Din sistemul (II.2.27) găsim

$$\Delta x_{11} = -\Delta x_{12} = \frac{5}{4}\,\theta\,;\ \Delta x_{22} = -\theta\,;\Delta x_{23} = 0\,;\Delta x_{31} = -\Delta x_{32} = -55\theta.$$

Modificarea soluției are eficiența maximă dacă i se atribuie parametrului θ cea mai mare valoare pentru care soluția rămîne realizabilă. Din condițiile

$$4 - \frac{5}{4}\,\theta \geqslant 0\,;\quad 4 - \theta \geqslant 0\,;\quad 106 - 55\theta \geqslant 0 \qquad \text{(II.2.28)}$$

găsim $\theta^* = \frac{106}{55}$.

Valorile variabilelor în noua soluție se obțin atribuind parametrului θ valoarea $\theta^* = \frac{106}{55}$. Pentru soluția inițială, funcția economică are valoarea $z = 1890$ iar pentru soluția modificată valoarea ei se micșorează cu

$$\bar{c}_{21}\,\theta = 269{,}5 \times \frac{106}{55} = 519{,}4$$

încît $z' = 1890 - 519{,}4 = 1370{,}6$. Acest rezultat se poate verifica în tabelul 40.

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 1 (40)

	1	2	3	4	a_i u_i
A	$\frac{185}{22} - \frac{5}{44}\theta$ 24 20	$\frac{35}{22} + \frac{5}{44}\theta$ 20 18	18 16	0 0	10 −20
B	$\frac{106}{55} + \frac{18}{165}\theta$ 25 18	$\frac{114}{55} - \frac{7}{165}\theta$ 30 15	$4 - \frac{0}{15}$ 15 12	0 0	8 −18
C	1 15	106−θ 1 10	θ 1 8	0 0	*** −10,1
b_j v_j	250 0	200 0,1	60 0,4	***	

Calculînd multiplicatorii simplex și costurile comparative găsim $\bar{c}_{33} = -1{,}7$, deci, soluția din tabelul 40 nu este optimă. Se atribuie variabilei x_{33} valoarea θ și se calculează variațiile variabilelor din bază rezolvînd sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{11} + \Delta x_{12} &= 0 \\
\Delta x_{21} + \Delta x_{22} + \Delta x_{23} &= 0 \\
\Delta x_{32} &= -\theta \\
24\Delta x_{11} + 25\Delta x_{21} &= 0 \\
20\Delta x_{12} + 30\Delta x_{22} + \Delta x_{32} &= 0 \\
15\Delta x_{23} &= -\theta.
\end{aligned} \qquad \text{(II.2.29)}$$

Se găsește $\Delta x_{11} = -\Delta x_{12} = -\frac{5}{44}\theta$; $\Delta x_{21} = \frac{18}{165}\theta$; $\Delta x_{22} = -\frac{7}{165}\theta$; $\Delta x_{23} = -\frac{1}{15}\theta$; $\Delta x_{32} = -\theta$. Valoarea maximă care poate fi atribuită parametrului θ se obține din condițiile de nenegativitate ale variabilelor x_{11}; x_{22}; x_{23} și x_{32} adică, din sistemul

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{185}{22} - \frac{5}{44}\theta \geqslant 0; \quad \frac{114}{55} - \frac{7}{165}\theta \geqslant 0; \quad 4 - \frac{1}{15}\theta \geqslant 0; \quad 106 - \theta \geqslant 0$$

care este satisfăcut pentru $\theta \leqslant \frac{342}{7} \simeq 49$ încît noua soluție se găsește luînd $\theta = \frac{342}{7}$.

Iterația 2 (41)

	1	2	3	4	a_i u_i
A	$\frac{20}{7}$ 24 20	$\frac{50}{7}$ 20 18	18 16	0 0	10 −107,4
B	$\frac{254}{35}$ 25 18	30 15	$\frac{26}{35}$ 15 12	0 0	8 −109,05
C	1 15	$\frac{400}{7}$ 1 10	$\frac{342}{7}$ 1 8	0 0	*** −14,47
b_j v_j	250 3,64	200 4,47	60 6,47	***	

Aplicînd testul de optimalitate pentru soluția din iterația a doua se constată că această soluție este optimă.

Pentru rezolvarea problemei de transport cu cereri aleatoare se folosește tabelul 42.

Soluția inițială se obține atribuind variabilelor x_{ij} valorile pe care le au în soluția optimă a problemei deterministice. Variabilele y_{hj} se calculează astfel:

— pe ruta 1, alocarea avioanelor asigură satisfacerea cererii de 250 locuri încît $y_{11} = 200$; $y_{21} = 20$; $y_{31} = 30$; $y_{41} = y_{51} = 0$;

— pe ruta 2, alocarea avioanelor asigură satisfacerea cererii de 143 locuri încît $y_{12} = 143$ și ceilalți $y_{h2} = 0$; $h = 2, \ldots, 6$;

— pe ruta 3, alocarea avioanelor asigură satisfacerea cererii de 11 locuri încît $y_{13} = 11$ și ceilalți $y_{h3} = 0$; $h = 2, \ldots, 5$. Variabilele

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 0 (42)

		Ruta 1	Ruta 2	Ruta 3	Avioane nefolosite	a_i u_i
Avioane tip	A	$\frac{20}{7}$ 24 20	$\frac{50}{7}$ 20 18	18 16	0 0	10 182
	B	$\frac{254}{35}$ 25 18	0 30 15	$\frac{26}{35}$ − 0 15 12	0 0	8 108
Creșteri	1	200 −1 −15	143 + 300 −1 −10	11 − 150 −1 −8		0
	2	20 −1 −12	−1 −9,5	−1 −7,2		0
	3	30 −1 −11,25	−1 −8	−1 −5,6		0
	4	−1 −6	−1 −6,5	−1 −3,2		0
	5	−1 −3	−1 −4	−1 −1,6		0
	6		−1 −2			0
	v_j	−11,25	−10	−8		

Scanned with OKEN Scanner

ale căror valori sînt încadrate în tabelul 42 aparţin bazei. Alegerea variabilelor x_{12} şi x_{23} ca variabile din bază este arbitrară.

Calculul multiplicatorilor u_i *şi* v_j se face rezolvînd sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} c_{12} + u_1 + p_{12} v_2 &= 0 \\ c_{23} + u_2 + p_{23} v_3 &= 0 \\ C_1 \gamma_{31} - \qquad v_1 &= 0 \\ C_2 \gamma_{12} - \qquad v_2 &= 0 \\ C_3 \gamma_{13} - \qquad v_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.2.30)}$$

Se obţine $v_1 = -11{,}25$; $v_2 = -10$; $v_3 = -8$; $u_1 = 182$; $u_2 = 108$.

Testul de optimalitate. Toate variabilele care nu aparţin bazei sînt fie la limita superioară fie la limita inferioară (x_{11} şi x_{21} se consideră că sînt la limita superioară, celelalte variabile care nu aparţin bazei, y_{hj}, fiind nule, sînt la limita inferioară în afară de y_{11} şi y_{21} care sînt la limita superioară. Calculăm costurile comparative

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11} &= 20 + 182 - 24 \times 11{,}25 = 202 - 270 = -68 \\ \bar{c}_{13} &= 16 + 182 - 18 \times 8 \quad\; = 198 - 144 = 54 \\ \bar{c}_{21} &= 18 + 108 - 25 \times 19{,}25 = 126 - 281{,}25 = -155{,}25 \\ \bar{c}_{22} &= 15 + 108 - 30 \times 10 \quad\; = 123 - 300 = -177 \end{aligned}$$

Testul de optimalitate nu este satisfăcut pentru x_{22} deoarece variabila x_{22} este la limita inferioară şi $\bar{c}_{22} < 0$ încît dacă $x_{22} = \theta$ valoarea funcţiei economice devine $z' = z + \bar{c}_{22}\theta = z - 177\theta$.

Se poate continua calculul costurilor comparative şi pentru celelalte variabile care nu aparţin bazei pentru a stabili dacă nu este posibil să se obţină o descreştere mai mare a funcţiei economice. Astfel avem

$$\begin{aligned} \bar{c}'_{11} &= -15 + 11{,}25 = -3{,}75 \qquad \bar{c}'_{22} = -9{,}5 + 10 = 0{,}5 \\ \bar{c}'_{21} &= -12 + 11{,}25 = -0{,}75 \qquad \ldots\ldots\ldots \\ c'_{41} &= -\;6 + 11{,}25 = 5{,}25 \qquad \ldots\ldots\ldots \\ c'_{51} &= -\;3 + 11{,}25 = 8{,}25 \qquad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\bar{c}'_{23} = -7{,}2 + 8 = 0{,}8$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Nu s-au mai calculat costurile comparative $\bar{c}'_{h2}$, $h = 3, \ldots, 6$ deoarece dacă $\bar{c}'_{22}$ este pozitiv celelalte sînt, de asemenea, pozitive. Din acelaşi motiv nu se calculează nici $\bar{c}'_{h3}$; $h = 3, \ldots, 5$.

Valorile găsite pentru costurile $\bar{c}'_{hj}$ verifică testul de optimalitate deoarece costurile comparative $\bar{c}'_{hj}$ asociate variabilelor la limita superioară y_{11} şi y_{21} sînt negative şi toate costurile $\bar{c}'_{hj}$ asociate variabilelor y_{hj} la limita inferioară sînt pozitive. Soluţia, totuşi, nu este optimă din cauză că $\bar{c}_{22} < 0$. Luînd $x_{22} = \theta$, variabilele din bază se ajustează aşa cum se arată în tabelul 42. Parametrul θ ia cea mai mare valoare care satisface condiţiile următoare:

— variabilele x_{13} şi y_{13} să nu ia valori mai mici decît marginile lor inferioare deci:

$$\begin{gathered} \frac{26}{35} - \theta \geqslant 0 \\ 11 - 15\,\theta \geqslant 0 \end{gathered} \qquad \text{(II.2.31)}$$

— variabila y_{12} să nu depăşească marginea ei superioară, deci

$$143 + 30\,\theta \leqslant 150. \qquad \text{(II.2.32)}$$

Din sistemul (II.2.31) se obţine $\theta \leqslant \frac{7}{30}$ încît luînd $x_{22} = \frac{7}{30}$ se găseşte o nouă soluţie pentru care valoarea funcţiei economice este $z' = z + \bar{c}_{22}\,\theta = z - 177 \times \frac{7}{30} = z - 41{,}3$ valoarea funcţiei

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + R_0 - \sum_h \sum_j C_j \gamma_{hj} y_{hj}$$

pentru soluţia iteraţiei 0 se calculează astfel

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \frac{20 \times 20}{7} + \frac{50 \times 18}{7} + \frac{254 \times 18}{35} + \frac{26 \times 12}{35} = 32\,526$$

$$R_0 = 250 \times 15 + 143 \times 10 + 11 \times 8 = 526\,800$$

$$\sum_h \sum_j C_j \gamma_{hj} y_{hj} = 200 \times 15 + 20 \times 12 + 30 \times 11{,}25 + 143 \times 10 + 11 \times 8 = 509\,550$$

$$z = 32\,525 + 526\,800 - 509\,550 = 49\,776.$$

Valoarea funcţiei z pentru soluţia modificată va fi

$$z' = 49\,776 - 4130 = 45\,646.$$

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 1 (43)

	1	2	3	4	a_i / u_i
A	$\frac{20}{7}$ 24 20	$\frac{50}{7}$ 20 18	18 16	0 0	10 64
B	$\frac{254}{35}$ 25 18	$\frac{7}{30}$ + 0 30 15	$\frac{107}{210}$ − 0 15 12	0 0	8 108
1	200 −1 −15	150 −1 −10	7,5 − 150 −1 −8		0
2	20 −1 −12	30 0 −1 −9,5	−1 −7,2		0
3	30 −1 −11,25	−1 −8	−1 −5,6		0
4	−1 −6	−1 −6,5	−1 −3,2		0
5	−1 −3	−1 −4	−1 −1,6		0
6		−1 −2			0
v_j	−11,25	−4,1	−8		

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat poate fi verificat pe tabelul 43 care conține soluția modificată. Mulțimea variabilelor din bază pentru iterația următoare se obține din mulțimea variabilelor din baza anterioară înlocuind pe y_{12} (care a atins marginea superioară) cu x_{22}. Dacă y_{12} nu-și atingea marginea superioară mulțimea variabilelor din bază rămînea aceeași, deci nu se modificau nici multiplicatorii simplex, $\bar{c}_{22}$ rămînea negativ dar variabilele din bază avînd alte valori, iterația conducea la altă valoare pentru θ.

Multiplicatorii simplex

$$
\begin{aligned}
18 + u_1 + 20v_2 &= 0 \\
15 + u_2 + 30v_2 &= 0 \qquad v_2 = -4{,}1 \\
12 + u_2 + 15v_3 &= 0 \qquad u_2 = 108 \\
-11{,}25 \quad - \quad v_1 &= 0 \qquad v_1 = -11{,}25 \\
-\ 8 \quad - \quad v_3 &= 0 \qquad v_3 = -8
\end{aligned}
$$

Costurile comparative

$$\bar{c}_{11} = 20 + 64 - 24 \times 11{,}25 = -186;$$
$$\bar{c}_{13} = 16 + 64 - 18 \times 8 = -64;$$
$$\bar{c}_{21} = 18 + 108 - 25 \times 11{,}25 = -155{,}25;$$
$$\bar{c}'_{11} = -15 + 11{,}25 = -2{,}75;$$
$$\bar{c}'_{21} = -12 + 11{,}25 = -0{,}75;$$
$$\bar{c}'_{41} = -6 + 11{,}25 = 5{,}25;$$
$$\bar{c}'_{12} = -10 + 4{,}1 = -5{,}9;$$
$$\bar{c}'_{22} = -9{,}5 + 4{,}1 = -5{,}4$$
$$\bar{c}'_{32} = -8 + 4{,}1 = -3{,}9$$
$$\bar{c}'_{42} = -6{,}5 + 4{,}1 = -2{,}4$$
$$\bar{c}'_{52} = -7{,}2 + 8 = 0{,}8$$

Calculînd costurile comparative $\bar{c}_{ij}$ și $\bar{c}'_{hj}$ găsim că soluția nu este optimă deoarece $\bar{c}_{13}$ și $\bar{c}'_{22}$, $\bar{c}'_{32}$, $\bar{c}'_{42}$ sînt negativi în timp ce variabilele x_{13} și y_{h2}, $h = 2, \ldots, 6$ sînt nule, deci la limita inferioară. Cu toate că $\bar{c}'_{22}$ nu este, în valoare absolută, cel mai mare dintre costurile comparative pentru care testul de optimalitate nu se verifică, vom atribui variabilei y_{22} o creștere. Această creștere se obține alocînd un număr sporit de avioane pe ruta 2. Din tabelul 43 se observă că avioanele care se alocă sînt de tipul B, deci un avion are capaci-

Scanned with OKEN Scanner

tatea de transport $p_{22} = 30$. Vom lua $y_{22} = 30\,\theta$ și formînd ciclul arătat în tabelul 43 calculăm valoarea maximă care poate fi atribuită parametrului θ din sistemul:

$$\begin{gathered} 30\ \theta \leqslant 20 \\ 7{,}5 - 15\ \theta \geqslant 0 \\ \frac{107}{210} - \theta \geqslant 0 \end{gathered} \qquad \text{(II.2.33)}$$

Prima relație din (II.2.33) exprimă condiția ca variabila să nu depășească marginea ei superioară, celelalte două inegalități din sistemul (II.2.33) sînt condițiile de nenegativitate pentru x_{23} și y_{23}. Găsim $\theta = 0{,}5$. Deoarece $\bar{c}'_{22} = 5{,}4$ valoarea funcției economice pentru noua soluție este

$$z'' = z' - 540 \times 30 \times 0{,}5 = 37\,546.$$

Se calculează multiplicatorii simplex pentru soluția din tabelul 44 și costurile comparative $\bar{c}_{ij}$, $\bar{c}'_{hj}$ și se constată că nici această soluție nu este optimă din cauză că $\bar{c}_{21} = 6{,}75$ iar x_{21} este la marginea superioară. Soluția se îmbunătățește dacă x_{21} descrește cu valoarea θ.

Din ciclul arătat în tabelul 44 și din condițiile

$$\begin{gathered} 30 - 25\ \theta \geqslant 0 \\ \frac{254}{35} - \theta \geqslant 0 \\ 15 + 30\ \theta \leqslant 20 \end{gathered} \qquad \text{(II.2.34)}$$

rezultă că $\theta = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ asigură cea mai mare descreștere posibilă a funcției economice. Soluția obținută după această modificare este înregistrată în tabelul 45. Calculînd multiplicatorii simplex și aplicînd acestei soluții testul de optimalitate se constată că am găsit soluția optimă. Valoarea funcției economice este acum

$$z''' = z'' - 675 \cdot \frac{1}{6} = 37\,546 - 112{,}5 = 37\,433{,}50$$

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 2

(44)

	1	2	3	4	a_i u_i
A	$\frac{20}{7}$ 24 20	$\boxed{\frac{50}{7}}$ 20 18	18 16	0 0	10 172
B	$\frac{254}{35} - \theta$ 25 18	$\boxed{\frac{26}{35}} + \theta$ 30 15	15 12	0 0	8 270
1	200 −1 −15	150 −1 −10	$\boxed{0}$ −1 −8		
2	20 −1 −12	$\boxed{15} + 300\theta$ −1 −9,5	−1 −7,2		
3	$\boxed{30} - 250\theta$ −1 −11,25	−1 −8	−1 −5,6		
4	−1 −6	−1 −6,5	−1 −3,2		
5	−1 −3	−1 −4	−1 −1,6		
6		−1 −2			
v_j	−11,25	−9,5	−8		

Iteraţia 3 (45)

	1	2	3	4	a_i u_i
A	$\frac{20}{7}$ 24 20	$\frac{50}{7}$ 20 18	18 16	0 0	10 185,50
B	$\frac{148,9}{21}$ 25 18	$\frac{19,1}{21}$ 30 15	15 12	0 0	8 263,25
1	200 −1 −15	150 −1 −10	0 −1 −8		0
2	20 −1 −12	20 −1 −9,5	−1 −7,2		0
3	26 −1 −11,25	−1 −8	−1 −5,6		0
4	−1 −6	−1 −6,5	−1 −3,2		0
5	−1 −3	−1 −4	−1 −1,6		0
6		−1 −2			
v_j	−11,25	−9,275	−8		

Scanned with OKEN Scanner

Pentru iterația 2 avem

Multiplicatorii simplex:

$$\begin{aligned} 20 + u_1 + 18v_1 &= 0 & u_1 &= 172 \\ 15 + u_2 + 30v_2 &= 0 & u_2 &= 270 \\ -11{,}25 \quad - \quad v_1 &= 0 & v_1 &= -11{,}25 \\ -9{,}5 \quad - \quad v_2 &= 0 & v_2 &= -9{,}5 \\ -8 \quad - \quad v_3 &= 0 & v_3 &= -8. \end{aligned}$$

Costurile comparative:

$\bar{c}_{11} = 20 + 172 - 24 \times 11{,}25 = -78$; $\bar{c}'_{11} = -15 + 11{,}25 = -3{,}75$;
$\bar{c}_{13} = 16 + 172 - 18 \times 8 = 44$; $\bar{c}'_{21} = -12 + 11{,}25 = -0{,}75$;
$\bar{c}'_{21} = 18 + 270 - 25 \times 11{,}25 = 6{,}75$; $\bar{c}'_{41} = -6 + 11{,}25 = 5{,}25$;
$\bar{c}'_{23} = 12 + 270 - 15 \times 8 = 162$; . . . . . ;

$\bar{c}'_{12} = -10 + 9{,}5 = -0{,}5$; $\bar{c}'_{23} = -7{,}2 + 8 = 0{,}8$

$\bar{c}'_{32} = -8 + 9{,}5 = 1{,}5$; . . . . .

. . . . . .

Pentru iterația 3 calculele sînt următoarele;

Multiplicatorii simplex:

$$\begin{aligned} 18 + u_1 + 20v_2 &= 0 & u_1 &= 167{,}50 \\ 18 + u_2 + 25v_1 &= 0 & u_2 &= 263{,}25 \\ 15 + u_2 + 30v_2 &= 0 & v_2 &= -9{,}275 \\ -11{,}25 \quad - \quad v_1 &= 0 & v_1 &= -11{,}25 \\ -8 \quad - \quad v_3 &= 0 & v_3 &= -8 \end{aligned}$$

Costurile comparative:

$\bar{c}_{11} = 20 + 167{,}50 - 24 \times 11{,}25 = -82{,}50$;
$\bar{c}_{13} = 16 + 167{,}50 - 18 \times 8 = 39{,}50$;
$\bar{c}_{23} = 12 + 263{,}25 - 15 \times 8 = 155{,}25$;
$\bar{c}'_{11} = -15 + 11{,}25 = -3{,}75$;
$c'_{21} = -12 + 11{,}25 = -0{,}75$;
$c'_{41} = -6 + 11{,}25 = 5{,}25$;
. . . . . .

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{c}'_{12} = -10 + 9{,}275 = -0{,}725; \qquad \bar{c}'_{23} = -7{,}2 + 8 = 0{,}8$$
$$\bar{c}'_{22} = -9{,}5 + 9{,}275 = -0{,}225;$$
$$\bar{c}'_{32} = -8 + 9{,}275 = 1{,}275;$$
. . . . . .

În cele ce urmează se expune problema cu preţuri neliniare şi metoda de rezolvare a lui C. M. Shetty [13] pentru ca apoi să se stabilească analogia dintre această problemă şi acea a transporturilor cu costuri aleatoare.

Se presupune că aprovizionînd n centre de consum cu o marfă care se poate procura de la m surse diferite, obiectivul urmărit este determinarea planului de aprovizionare care asigură satisfacerea cererii cu un *cost minim de cumpărare şi transport*. Preţul de cumpărare al mărfii la sursa i este preţul de producţie la această sursă. Se admite că cheltuielile de producţie la fiecare sursă depind de volumul mărfurilor produse şi că această dependenţă este dată grafic sau analitic.

Se notează cu $c = [c_{ij}]$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ matricea costurilor de transport; cu $b = [b_j]$; $j = 1, \ldots, n$ vectorul cerere şi cu $F = [F_i(a_i)]$ vectorul preţurilor de producţie, $F_i(a_i)$ fiind funcţia care exprimă costul unei unităţi de marfă produsă la sursa i în funcţie de volumul a_i al producţiei. Se admite că $F_i(a_i)$ sînt funcţii continue, cu derivate de ordinul întîi continue şi nedescrescătoare. Fie

$$\frac{dF_i(a_i)}{da_i} = f_i(a_i);$$

$f_i(a_i)$ denumit „costul marginal" exprimă viteza cu care se modifică preţul de cost în funcţie de volumul producţiei şi este prin ipoteză o funcţie continuă şi nedescrescătoare pentru toţi $i = 1, \ldots, m$.

Problema constă în determinarea matricei livrărilor $x = \| x_{ij} \|$ care satisfac condiţiile

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \qquad j = 1, \ldots, n \tag{II.2.35}$$
$$x_{ij} \geqslant 0$$

şi minimizează funcţia

$$C(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i} F_i(a_i) \tag{II.2.36}$$

unde $a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, iar $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

Scanned with OKEN Scanner

Din formularea problemei rezultă că nivelul producției la fiecare din sursele i se determină o dată cu alegerea planului optim de aprovizionare a centrelor consumatoare.

Făcînd schimbarea de variabilă $x_{ij} = y_{ij}^2$, problema determinării minimului funcției $C(x)$ cu condițiile (II.2.35) devine o problemă de extrem constrîns căreia i se poate aplica metoda multiplicatorilor Lagrange. Construind funcția

$$\Phi(y, \lambda) = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}^2 + \sum_i F_i\left(\sum_j y_{ij}^2\right) - \sum_j \lambda_j \left(\sum_i y_{ij}^2 - b_j\right) \quad \text{(II.2.37)}$$

condițiile necesare pentru ca $x = [x_{ij}]$ să fie un punct de minim al funcției sînt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{ij}} = 0\,; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_{ij}^2} \geqslant 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \quad \text{(II.2.38)}$$

Funcția $C(x)$ este convexă în baza condițiilor impuse funcțiilor $F_i(a_i)$ încît (II.2.38) sînt condiții necesare și suficiente pentru ca punctul astfel determinat să fie un punct de minim absolut al funcției $C(x)$. Pentru $\Phi(y, \lambda)$ definit de egalitatea (II.2.37) relațiile (II.2.38) sînt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{ij}} = y_{ij}(c_{ij} + f_i - \lambda_j) = 0 \quad \text{(II.2.39)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \sum_i y_{ij}^2 - b_j = 0 \quad \text{(II.2.40)}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_{ij}^2} = c_{ij} + f_i - \lambda_j + y_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial y_{ij}} \geqslant 0. \quad \text{(II.2.41)}$$

Funcțiile $f_i(a_i)$ pot fi privite ca funcții compuse de y_{ij} deoarece $a_i = \sum_i y_{ij}^2$ încît se poate scrie

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_{ij}} = \frac{\partial f_i}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial y_{ij}} = 2 y_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial a_i}.$$

Ecuațiile (II.2.40) arată că variabilele y_{ij} satisfac restricțiile (II.2.35) încît un punct $y = [y_{ij}]$ care satisface aceste condiții este un punct de minim dacă pentru toți y_{ij} avem:

$$\begin{gathered} y_{ij}(c_{ij} + f_i - \lambda_j) = 0 \\ c_{ij} + f_i - \lambda_j + 2 y_{ij}^2 \frac{\partial f}{\partial a_i} \geqslant 0. \end{gathered} \quad \text{(II.2.42)}$$

Pentru $y_{ij} = 0$ sistemul (II.2.42) este satisfăcut dacă $c_{ij} + f_i - \lambda_j \geqslant 0$. Pentru $y_{ij} > 0$ sistemul (II.2.42) este satisfăcut dacă $c_{ij} + f_i - \lambda_j = 0$ deoarece $\frac{\partial f}{\partial a_i} \geqslant 0$ prin ipoteză. Revenind acum la variabilele inițiale x_{ij} putem afirma că matricea $x = \|x_{ij}\|$ este optimală dacă este realizabilă adică dacă $x_{ij} \geqslant 0$ și $\sum_i x_{ij} = b_j$ pentru toți $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ și dacă satisfac condițiile:

$$\text{pentru } x_{ij} = 0 \text{ sau } x_{ij} \notin B, \quad c_{ij} + f_i - \lambda_j \geqslant 0 \qquad \text{(II.2.43)}$$

$$\text{pentru } x_{ij} > 0 \text{ sau } x_{ij} \in B, \quad c_{ij} + f_i - \lambda_j = 0. \qquad \text{(II.2.44)}$$

Observăm că testul de optimalitate a unei selecții în problemele de transport cu costuri neliniare este formal identic cu testul de optimalitate a soluțiilor în problemele clasice de transport, f_i și λ_j joacă rolul multiplicatorilor simplex u_i și v_j cu deosebirea că f_i nu sînt constante.

Numerele λ_j fiind arbitrare iar c_{ij} și f_i fiind nenegativi, λ_j pot fi aleși în așa fel încît condițiile (II.2.43) să fie totdeauna satisfăcute. Dacă pentru λ_j aleși sînt satisfăcute și condițiile (II.2.44) soluția este optimă. C. M. Shetty notează cu c'' matricea cu elementele $c_{ij} + f_i - \lambda_j$ deci

$$c'' = \|c_{ij} + f_i - \lambda_j\|; \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$$

și numește *matrice soluție* matricea c'' ale cărei elemente satisfac condițiile (II.2.43)—(II.2.44). Pentru a construi o matrice c'' se alege un program $x^0 = \|x^0_{ij}\|$ astfel ca cererile b_j să fie satisfăcute în toate punctele de consum, adică $\sum_i x^0_{ij} = b_j$. Însumînd cantitățile de marfă solicitate de la fiecare sursă se calculează $a^0_i = \sum_j x^0_{ij}$ și $f^0_i = f_i(a^0_i)$ și se construiește matricea

$$c'_0 = \|c_{ij} + f^0_i\| \qquad \text{(II.2.45)}$$

Fie λ_j cel mai mic element din coloana j, deci

$$\lambda^0_j = \min\,(c_{ij} + f^0_i) \text{ pentru } j = 1, \ldots, n \qquad \text{(II.2.46)}$$

Scăzînd din elementele fiecărei coloane numărul λ^0_j definit prin (II.2.46) se obține o matrice $c'' = \|c_{ij} + f^0_i - \lambda^0_j\|$ care este o matrice soluție dacă pentru programul $x^0 = \|x^0_{ij}\|$ asociat ei avem

$$c_{ij} + f^0_i - \lambda^0_j \geqslant 0 \quad \text{pentru toți } x^0_{ij} = 0 \qquad \text{(II.2.47)}$$

$$c_{ij} + f^0_i - \lambda^0_j = 0 \quad \text{pentru toți } x^0_{ij} > 0. \qquad \text{(II.2.48)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Modul în care au fost definite numerele λ_j^0 ne asigură că matricea c_0'' are toate elementele nenegative încît condiţiile (II.2.47) sînt sigur satisfăcute. c_0'' este matricea soluţie dacă pentru programul $x^0 = \|x_{ij}^0\|$ asociat ei sînt satisfăcute condiţiile (II.2.48). În caz contrar soluţia x^0 poate fi îmbunătăţită. Pentru a stabili modul în care poate fi îmbunătăţită o soluţie realizabilă se studiază variaţia funcţiei $C(x^0)$ cînd valoarea unei variabile $x_{hj}^0 > 0$ descreşte cu o mărime Δx_{hj}. Dacă x_{hj}^0 se înlocuieşte cu $x_{hj}^0 - \Delta x_{hj}$, una dintre variabilele x_{ij}^0; $i = 1, \ldots, m$; $i \neq h$, de exemplu x_{tj}^0, trebuie să ia valoarea $x_{tj}^0 + \Delta x_{hj}$ pentru ca cererea b_j să fie satisfăcută de noul program de aprovizionare.

Fie x^* programul care se obţine în urma modificărilor propuse. Sumele $a_i^0 = \sum_j x_{ij}$ pentru toţi $i \neq h$ şi $i \neq t$ nu se modifică atunci cînd programul x^0 este înlocuit prin x^*. Sumele a_h^0 şi a_t^0 devin

$$a_h^* = a_h^0 - \Delta x_{hj} \quad \text{şi} \quad a_t^* = a_t^0 + \Delta x_j^h.$$

Valorile funcţiei $C(x)$ pentru programele x^0 şi x^{*} sînt

$$C(x^0) = \sum_i \sum_j c_{ij}\ x_{ij}^0 + \sum_i F_i(a_i^0)$$

$$C(x^*) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}^0 + (c_{tj} - c_{hj})\,\Delta x_{hj} + \sum_{\substack{i \neq h \\ i \neq t}} F_i(a_i^0) + F_h(a_h^0 - \Delta x_{hj}) + F_t(a_t^0 + \Delta x_{hj})$$

încît raportul dintre diferenţa acestor valori, pe care o vom nota cu $\Delta C(x^0)$, şi variaţia Δx_{hj} este

$$\frac{\Delta C(x^0)}{\Delta x_{hj}} = c_{tj} - c_{hj} - \frac{F_h(a_h^0 - \Delta x_{hj}) - F_h(a_h^0)}{-\Delta x_{hj}} + \frac{F_t(a_t^0 + \Delta x_{hj}) - F_t(a_t^0)}{\Delta x_{hj}}$$

Luînd limita acestui raport pentru $\Delta x_{hj} \to 0$ avem

$$\frac{\partial C(x^0)}{\partial x_{hj}} = c_{tj} - c_{hj} - f_h^0 + f_t^0 = (c_{tj} + f_t^0) - (c_{hj} + f_h^0) = c_{tj}' - c_{hj}' \qquad \text{(II.2.49)}$$

sau scăzînd în ambele paranteze numărul λ_j^0 definit prin (II.2.46), avem

$$\frac{\partial C(x^0)}{\partial x_{hj}} = (c_{tj} + f_t^0 - \lambda_j^0) - (c_{hj} + f_h^0 - \lambda_j^0) = c_{tj}'' - c_{hj}''. \qquad \text{(II.2.50)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că termenii din membrul drept ai egalității (II.2.50) sînt elementele matricei c''_0 corespunzătoare variabilelor x_{tj}, x_{hj} încît se poate spune că elementele matricei c'' măsoară viteza de modificare a variației funcției $C(x)$. Dacă x_{hj} descrește cu o unitate și x_{tj} crește cu o unitate, valoarea funcției $C(x)$ descrește cu $c''_{hj} - c''_{tj}$. Acest rezultat ne îngăduie să stabilim o posibilitate de îmbunătățire a unei soluții.

Să admitem că pentru o soluție realizabilă s-a calculat matricea c'' și că aceasta nu este o matrice program. Fie c_{IJ} cel mai mare dintre elementele matricei c'' care corespunde unui $x_{ij} > 0$.

Fie x^*_{iJ}; $i = 1, \ldots, m$ altă mulțime de alocații în coloana J. Programul în care coloana J are alocațiile x^*_{iJ} este realizabil dacă acestea îndeplinesc condiția

$$\sum_i x^*_{iJ} = b_j. \tag{II.2.51}$$

Fie s_1 mulțimea indicilor i pentru care $x^*_{iJ} > 0$ și
s_2 mulțimea indicilor i pentru care $x^*_{iJ} = 0$.

Cantitățile de marfă a_i care trebuie produse în $i = 1, \ldots, m$ pentru îndeplinirea programului modificat sînt

$$a^*_i = x^*_{iJ} + \sum_{j \neq J} x_{ij}; \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{II.2.52}$$

Dacă a_i se scrie sub forma

$$a_i = x_{iJ} + \sum_{j \neq J} x_{ij}; \qquad i = 1, \ldots, m \tag{II.2.53}$$

din (II.2.52) și (II.2.53) rezultă că

$$a_i - a^*_i = x_{iJ} - x^*_{iJ}$$

sau, deoarece x^*_{iJ} este nenegativ, avem

$$a_i - a^*_i \leqslant x_{iJ}. \tag{II.2.54}$$

Pe de altă parte programul de producție a^*_i; $i=1, \ldots, m$ satisface cererea totală dacă

$$\sum_i a^*_i = \sum_i a_i. \tag{II.2.55}$$

Construim matricea $c'^* = [c'^*_{ij}]$ asociată programului modificat. Elementele acestei matrice sînt

$$c'^*_{ij} = c_{ij} + f_i(a^*_i) \tag{II.2.56}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f_i(a_i^*)$ este valoarea funcției f_i pentru a_i^*. Din (II.2.49) rezultă că funcția $C(x)$ ia cea mai mică valoare pentru programul în care s-au modificat numai alocațiile din coloana J dacă

$$c'^*_{hj} - c'^*_{tj} \leqslant 0 \quad \text{pentru} \quad h \in s_1 \quad \text{și} \quad t \in s_2 \qquad \text{(II.2.57)}$$

$$c'^*_{hj} - c'^*_{tj} = 0 \quad \text{pentru} \quad h \in s_1 \quad \text{și} \quad t \in s_1. \qquad \text{(II.2.58)}$$

C. M. Shetty propune o metodă grafică pentru rezolvarea sistemului (II.2.54)—(II.2.55)—(II.2.57)—(II.2.58). Dacă condițiile (II.2.57—II.2.58) sînt simultan satisfăcute pentru toate coloanele soluția este optimă.

O altă posibilitate de îmbunătățire a unei soluții realizabile se stabilește după cum urmează:

Să presupunem că într-o matrice c'' *elementele cărora le corespund alocații* sînt astfel situate încît se poate construi un ciclu T plecînd de la un element $c''_{i_1 j_1}$, trecînd la un alt element situat în aceeași coloană $c''_{i_2 j_1}$, de aici la un element situat pe aceeași linie $c''_{i_2 j_2}$ și continuînd deplasările alternativ de-a lungul unei coloane și apoi de-a lungul unei linii (fără a trece din nou pe o linie sau coloană deja parcursă) pînă cînd se ajunge la un element $c''_{i_1 j_2}$ situat pe linia elementului inițial. Astfel ciclul T este format din succesiunea de elemente *(cu alocații)*

$$T = \{c''_{i_1 j_1}, c''_{i_2 j_1}, c''_{i_2 j_2}, \ldots, c''_{i_1 j_r}\}.$$

Dacă există un ciclu T este posibil să se modifice simultan alocațiile din mai multe coloane astfel încît valoarea funcției $C(x)$ pentru soluția obținută să fie îmbunătățită. Pentru aceasta se notează cu t și t' succesiunile

$$t = \{c''_{i_1 j_1}, c''_{i_2 j_2}, \ldots, c''_{i_r j_r}\}$$

$$t' = \{c''_{i_2 j_1}, c''_{i_3 j_2}, \ldots, c''_{i_1 j_r}\}$$

și se calculează suma

$$S = \sum_t (c''_{i_p j_p} - c''_{i_q j_p}).$$

Dacă $S > 0$ variabilele corespunzătoare elementelor care aparțin succesiunii t descresc și cele care corespund succesiunii t' cresc. Dacă $S < 0$ variabilele corespunzătoare elementelor care aparțin succesiunii t cresc, cele care corespund succesiunii t' descresc.

Scanned with OKEN Scanner

Deplasarea maximă a alocației în ciclul T este egală cu valoarea celei mai mici dintre alocațiile descrescătoare. Fie α această valoare. Din egalitatea (II.2.50) rezultă cu ușurință că, pentru noua soluție, valoarea funcției $C(x)$ se micșorează cu

$$\alpha \left[\sum_{i} (c''_{i_p j_p} - c''_{i_q i_p}) \right].$$

O soluție inițială a problemei de transport cu costuri neliniare se poate obține în diferite moduri. De exemplu se poate satisface cererea fiecărui consumator j de la sursa l pentru care $c_{lj} = \min_i c_{ij}$.

Se pare totuși că procedînd astfel soluția inițială este, în genere, destul de departe de soluția optimă fiindcă ponderea cea mai mare în $C(x)$ o deține costul producției. O soluție inițială care ține seamă oarecum de acest cost se obține astfel:

— se calculează $f_i(0)$, valorile funcțiilor f_i pentru $a_i = 0$; $i = 1, \ldots, m$;

— se calculează $c^0_{ij} = c_{ij} + f_i(0)$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ și se scrie matricea $C^0 = [c^0_{ij}]$;

— se satisface fiecare cerere b_j luînd $x_{lj} = b_j$ dacă $c^0_{lj} = \min_i c^0_{ij}$.

Soluția obținută este realizabilă. Pentru aplicarea testului de optimalitate se construiește matricea c''. În acest scop se calculează $a_i = \sum_j x_{ij}$ și valorile $f_i(a_i)$ apoi se formează matricea $c' = [c_{ij} + f_i(a_i)]$ și se determină elementul minim λ_j din fiecare coloană. Scăzînd pe λ_j din toate elementele coloanei j și repetînd aceeași operație pentru fiecare coloană se obține matricea $c'' = [c_{ij} + f_i(a_i) - \lambda_j]$. În această matrice marcăm elementele corespunzătoare celor cărora li s-au atribuit valorile $x_{lj} = b_j$ în matricea C^0. Dacă toate elementele marcate sînt nule, soluția este optimă. În caz contrar se folosește unul din procedeele expuse anterior pentru îmbunătățirea soluției.

Exemplul III. Patru șantiere pot fi aprovizionate cu o anumită calitate de ciment de fabricile F_1, F_2 și F_3. Se cere să se stabilească modul în care trebuie făcută aprovizionarea astfel încît costul total al cimentului și al transporturilor la șantiere să fie minim. Se știe că șantierele solicită 250 vagoane, 100 vagoane, 180 vagoane și 70 vagoane; capacitatea de producție a fiecărei fabrici poate satisface orice cerere; costul de producție este:

pentru F_1: $F_1(a_1) = 0{,}03a_1^2 + 4a_1 + k_1$

pentru F_2; $F_2(a_2) = 0{,}01a_2^2 + 6a_2 + k_2$

pentru F_3: $F_3(a_3) = 0{,}02a_3^2 + 5a_3 + k_3$

Scanned with OKEN Scanner

k_1, k_2 şi k_3 fiind nişte constante şi a_1, a_2, a_3 cantităţile de ciment comandate. Matricea costurilor de transport este

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Vom construi soluţia iniţială pe matricea $c^0 = \| c^0_{ij} \| = \| c_{ij} + f_i(0) \|$. Pentru aceasta se calculează :

$$\frac{dF_1}{da_1} = f_1(a_1) = 0{,}06a_1 + 4$$

$$\frac{dF_2}{da_2} = f_2(a_2) = 0{,}02a_2 + 6$$

$$\frac{dF_3}{da_3} = f_3(a_3) = 0{,}04a_3 + 5.$$

Valorile acestor funcţii pentru $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ sînt $f_1(0) = 4$; $f_2(0) = 6$, $f_3(0) = 5$. Vom scrie matricea c^0 într-un tabel de forma celor utilizate pentru rezolvarea problemelor clasice de transport pentru ca pe acest tabel să fie construită soluţia iniţială şi să se calculeze cantităţile de ciment a_i solicitate fabricilor.

(46)

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	250 6	100 6	9	10	350
2	10	11	180 9	70 8	250
3	10	11	13	9	0
b_j	250	100	180	70	

În coloana a treia avem două elemente de aceeaşi valoare $c^0_{13} = c^0_{23}$. Deoarece fabrica F_1 este prea solicitată am repartizat comanda şantierului III fabricii F_2. Cunoscînd acum volumul producţiei fiecărei fabrici se pot calcula

$$f_1(a_1) = 0{,}06 \times 350 + 4 = 25\,; \quad f_2(a_2) = 0{,}02 \times 250 + 6 = 11\,;$$

$$f_3(a_3) = 0{,}04 \times 0 + 5 = 5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea $c' = [c_{ij} + f_i(a_i)]$ este

$$c' = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 30 & 31 \\ 15 & 16 & 14 & 13 \\ 10 & 11 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

Elementele minime pe coloane sînt $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 11$; $\lambda_3 = 13$; $\lambda_4 = 9$ încît

$$c'' = \| c'_{ij} - \lambda_j \| = \begin{bmatrix} \textcircled{17} & \textcircled{16} & 17 & 22 \\ 5 & 5 & \textcircled{1} & \textcircled{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

În matricea c'' am marcat elementele care corespund variabilelor $x_{ij} > 0$ în soluția inițială. Se observă că elementele c''_{ij} care corespund variabilelor $x_{ij} = 0$ în soluția inițială sînt nenegative încît condiția (II.2.47) este satisfăcută, dar condiția (II.2.48) nefiind satisfăcută c'' nu este matricea soluție. Elementul c''_{11} fiind cel mai mare dintre acele care corespund alocărilor, îmbunătățirea soluției se va face modificînd alocările din prima coloană (a doua metodă de îmbunătățire nu poate fi aplicată aici deoarece nu se poate forma ciclul T).

Dacă o nouă alocare în coloana întîi prevede

$$x_{11} = 250 - \alpha; \qquad x_{21} = \beta; \qquad x_{31} = \gamma$$

trebuie să avem $\beta + \gamma = \alpha$ pentru ca cererea șantierului I să fie satisfăcută. După această modificare fabricile vor trebui să livreze cantitățile:

$$a_1^* = 350 - \alpha; \quad a_2^* = 250 + \beta; \quad a_3^* = \gamma.$$

Pentru a scrie condițiile (II.2.57)—(II.2.58) se calculează

$$f_1(a_1^*) = 25 - 0{,}06\alpha; \; f_2(a_2^*) = 11 + 0{,}02\beta; \; f_3(a_3^*) = 5 + 0{,}04\gamma$$

și $c'^*_{i1} = c_{i1} + f_i(a_i^*)$ pentru $i = 1, 2, 3$

$$c'^*_{11} = 2 + 25 - 0{,}06\alpha = 27 - 0{,}06\alpha;$$

$$c'^*_{21} = 4 + 11 + 0{,}02\beta = 15 + 0{,}02\beta;$$

$$c'^*_{31} = 5 + 5 + 0{,}04\gamma = 10 + 0{,}04\gamma.$$

Deoarece variabila care descrește este x_{11}, indicele h din formula (II.2.57)—(II.2.58) este $h = 1$, t ia valorile 2 și 3 iar $j = 1$. Toate

Scanned with OKEN Scanner

variabilele din prima coloană au valori nenule dacă pot fi satisfăcute simultan ecuaţiile (II.2.58), adică

$$c'^{*}_{11} = c'^{*}_{21} = c'^{*}_{31} \quad \text{sau} \quad 27 - 0{,}06\alpha = 15 + 0{,}02\beta = 10 + 0{,}04\gamma$$

$$\text{şi} \quad \alpha = \beta + \gamma.$$

Soluţia acestui sistem este $\alpha = \frac{2050}{11}$; $\beta = \frac{450}{11}$; $\gamma = \frac{1600}{11}$ încît s-a găsit un nou program realizabil pe care îl prezentăm în tabelul 47.

(47)

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	$\frac{700}{11}$ 2	100 2	5	6	$\frac{1800}{11}$
2	$\frac{450}{11}$ 4	5	180 3	70 2	$\frac{3200}{11}$
3	$\frac{1600}{11}$ 5	6	8	4	$\frac{1600}{11}$
b_j	250	100	180	70	

Costurile înregistrate în tabel sînt costurile de transport c_{ij}. Pentru a testa optimalitatea soluţiei calculăm

$$f_1(a_1) = \frac{152}{11} \; ; \; f_2(a_2) = \frac{130}{11} \; ; \; f_3(a_3) = \frac{119}{11}$$

$$c' = \begin{bmatrix} 174 & 174 & 207 & 218 \\ 174 & 185 & 163 & 152 \\ 174 & 185 & 207 & 163 \end{bmatrix} \qquad c'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 44 & 66 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 44 & 11 \end{bmatrix}$$

Notă: toate elementele matricei c' au fost înmulţite cu 11. Această operaţie nu modifică rezultatele fiindcă elementele matricei c' nu intră efectiv în calcule.

Matricea c'' este matricea soluţie.

Exemplul IV. Pentru a aplica metoda de îmbunătăţire a soluţiei prin modificarea simultană a alocaţiilor din mai multe coloane să admitem că o soluţie realizabilă a unei probleme de tipul celor de care ne ocupăm a fost determinată cu o metodă oarecare. Această soluţie cît şi costurile şi cererile sînt înregistrate în tabelul 48.

(48)

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	8	100 7	20 6	80 6	10	200
2	100 7	10	8	40 7	60 6	200
3	9	50 7	60 5	8	40 8	150
b_j	100	150	80	120	100	

Costul de transport asociat acestei soluţii, pe care o notăm cu x^0, este $C(x^0) = 3\,610$. Funcţiile $f_i(a_i)$ sînt

$$f_1(a_1) = 0{,}03a_1 + 5\,;\ f_2(a_2) = 0{,}02a_2 + 7\,;\ f_3(a_3) = 0{,}05a_3 + 1$$

Pentru a scrie matricea $c' = \|c_{ij} + f_i(a_i)\|\,;\ i = 1, 2, 3\,;\ j = 1, \ldots, 5$ calculăm

$$f_1(200) = 0{,}03 \times 200 + 5 = 11\,;\ f_2(200) = 0{,}02 \times 200 + 7 = 11\,;\ f_3(150) = 0{,}05 \times 150 + 1 = 8{,}5$$

încît matricea c' este

$$c' = \begin{bmatrix} 19 & 18 & 17 & 17 & 21 \\ 18 & 21 & 19 & 18 & 17 \\ 17{,}5 & 15{,}5 & 13{,}5 & 16{,}5 & 16{,}5 \end{bmatrix}$$

Luînd elementele minime din fiecare coloană găsim

$$\lambda_1 = 17{,}5\,;\ \lambda_2 = 15{,}5\,;\ \lambda_3 = 13{,}5\,;\ \lambda_4 = 16{,}5\,;\ \lambda_5 = 16{,}5.$$

Se scrie matricea $c'' = \|c'_{ij} - \lambda_j\|\,;\ i = 1, 2, 3\,;\ j = 1, \ldots, 5$ şi se înregistrează în această matrice alocaţiile din tabelul 49.

Scanned with OKEN Scanner

(49)

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	1,5	(100) 2,5	(20) 3,5	(80) 0,5	4,5	200
2	(100) 0,5	5,5	5,5	(40) 1,5	(60) 0,5	200
3	0	(50) 0	(60) 0	0	(40) 0	150
b_j	100	150	80	120	100	

Matricea c'' nu este matricea soluţie fiindcă c''_{ij} nu sînt nuli pentru toţi $x_{ij} > 0$. E uşor de văzut că se poate forma ciclul

$$T = (c''_{12}\ c''_{32}\ c''_{35}\ c''_{25}\ c''_{24}\ c''_{14})$$

succesiunile t şi t' fiind

$$t = \{c''_{12}\ c''_{35}\ c''_{24}\}; \qquad t' = \{c''_{32}\ c''_{25}\ c''_{14}\}$$

Suma S este $S = (c''_{12} - c''_{32}) + (c''_{35} - c''_{25}) + (c''_{24} - c''_{14}) = (2{,}5 - 0) + (0 - 0{,}5) + (1{,}5 - 0{,}5) \qquad S = 2{,}5 - 0{,}5 + 1 = 3.$

Deoarece $S > 0$ variabilele corespunzătoare elementelor succesiunii t descresc. În tabelul 49 aceste variabile sînt marcate cu semnul „—". Variabilele corespunzătoare elementelor succesiunii t' cresc şi sînt marcate în tabel cu semnul „+". Numărul α ia valoarea 40 egală cu cea mai mică alocaţie marcată cu semnul „—". Modificînd elementele ciclului T cu $\alpha = 40$ se găseşte o nouă soluţie realizabilă pe care o înregistrăm într-un tabel în care costurile sînt c''_{ij} pentru a verifica dacă soluţia este optimă.

Notăm cu x^1 soluţia din tabelul 50. Valoarea funcţiei $C(x)$ pentru soluţia x^1 este $C(x^1) = 3490$. Acest rezultat verifică relaţia

$$C(x^1) = C(x^0) - \alpha S = 3\,610 - 40 \times 3 = 3610 - 120 = 3\,490.$$

Scanned with OKEN Scanner

(50)

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	1,5	(60) + 2,5	(20) − 3,5	(120) 0,5	4,5	200
2	(100) 0,5	5,5	5,5	1,5	(100) 0,5	200
3	0	(90) − 0	(60) + 0	0	0	150
b_j	100	150	80	120	100	

Soluţia x^1 nu este optimă şi se poate îmbunătăţi folosind ciclul

$$T_1 = (c''_{12}\ c''_{32}\ c''_{33}\ c''_{13}).$$

Succesiunile t_1 şi t'_2 sînt

$$t_1 = \{c''_{12}\ c''_{33}\};\quad t'_1 = \{c''_{32}\ c''_{13}\}.$$

$$\text{Suma } S_1 = (c''_{12} - c''_{32}) + (c''_{33} - c''_{13}) = (2{,}5 - 0) + (0 - 3{,}5) =$$
$$= 2{,}5 - 3{,}5 = -1$$

încît elementele x_{12}, x_{33} cresc şi x_{32}, x_{13} descresc; $\alpha_1 = 20$; soluţia x^2 este înregistrată în tabelul 51.

Valoarea funcţiei economice se micşorează cu $\alpha_1 S_1 = -20$ deci $C(x^2) = 3470$. Soluţia x^2 nu este optimă şi nu se mai poate îmbunătăţi prin modificarea simultană a alocaţiilor din mai multe coloane încît trebuie folosită prima metodă expusă. Cel mai mare element c''_{ij}, căruia îi corespunde o alocaţie, este c''_{12} încît $c''_{IJ} = c''_{12} = 2{,}5$. Modificările alocaţiilor se fac în coloana a doua. Dacă x_{12} descreşte cu α, iar x_{22} şi x_{32} cresc respectiv cu β şi γ, programul rămîne realizabil dacă

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Scanned with OKEN Scanner

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	1,5	(80) 2,5	3,5	(120) 0,5	4,5	200
2	(100) 0,5	5,5	5,5	1,5	(100) 0,5	200
3	0	(70) 0	(80) 0	0	0	150
b_j	100	150	80	120	100	

Valorile mărimilor a_i, după această modificare, sînt:

$$a_1^* = 200 - \alpha; \quad a_2^* = 200 + \beta; \quad a_3^* = 150 + \gamma$$

iar funcțiile $f_i(a_i^*)$ iau valorile:

$$f_1(a_1^*) = 11 - 0{,}03\alpha; \quad f_2(a_2^*) = 11 + 0{,}02\beta; \quad f_3(a_3^*) = 8{,}5 + 0{,}05\gamma$$

Sistemul (II.2.57)—(III.2.58), pentru acest caz, este

$$c_{12}^* = c_{32}^* \quad \text{adică} \quad 18 - 0{,}03\alpha = 15{,}5 + 0{,}05\gamma$$

$$c_{22}^* > c_{12}^* \quad \text{adică} \quad 21 + 0{,}02\beta > 18 \quad - 0{,}03\alpha.$$

Deoarece $x_{22} = 0$ și impunem condiția $c_{22}^* > c_{12}^*$, rezultă că $\beta = 0$ deci $\alpha = \gamma$ încît, din ecuația $c_{12}^* = c_{32}^*$, găsim $\alpha = \gamma = 31{,}25$. Soluția x^3 care se obține după aceste modificări este înregistrată în tabelul 52. Pentru a testa optimalitatea acestei soluții se calculează

$$f_1(a_1) = f_1(168{,}75) = 10{,}0625$$

$$f_2(a_2) = f_2(200) = 11$$

$$f_3(a_3) = f_3(181{,}25) = 10{,}0625.$$

Scanned with OKEN Scanner

(52)

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	8	(48,75) 7	6	(120) 6	10	168,75
2	(100) 7	10	8	7	(100) 6	200
3	9	(101,25) 7	(80) 5	8	8	181,25
b_j	100	150	80	120	100	

Matricea c', pentru soluţia x^3 este

$$c' = \begin{bmatrix} 18{,}0625 & 17{,}0625 & 16{,}0625 & 16{,}0625 & 20{,}0625 \\ 18 & 21 & 19 & 18 & 17 \\ 19{,}0625 & 17{,}0625 & 15{,}0625 & 18{,}0625 & 18{,}0625 \end{bmatrix}$$

Elementele minime pe coloană sînt

$\lambda_1 = 18$; $\lambda_2 = 17{,}0625$; $\lambda_3 = 15{,}0625$; $\lambda_4 = 16{,}0625$; $\lambda_5 = 17$ încît matricea $c'' = \| c'_{ij} - \lambda_j \|$; $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 5$ este

$$c'' = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 & 1 & 0 & 3{,}0625 \\ 0 & 3{,}9375 & 3{,}9375 & 1{,}9375 & 0 \\ 1{,}0625 & 0 & 0 & 2 & 1{,}0625 \end{bmatrix}$$

Se observă cu uşurinţă că tuturor valorilor $x_{ij} > 0$ din soluţia x^3 le corespund în matricea c'' elemente nule, deci x^3 este soluţia optimă. Modelul problemei de transport cu costuri neliniare poate fi interpretat ca modelul problemei de transport cu cereri aleatoare dacă:

— indicii j caracterizează sursele de mărfuri;
— indicii i caracterizează punctele de consum;

Scanned with OKEN Scanner

— disponibilul de marfă b_j al fiecărei surse este cunoscut;

— cererea ζ_i în punctul de consum i este o variabilă aleatoare cu funcţia densitate de probabilitate $f_i(\zeta_i)$.

Dacă se notează cu k_i beneficiul realizat prin vînzarea unei unităţi de marfă în punctul de consum i, beneficiul mediu realizat prin vînzările în i este

$$R_i(a_i) = k_i\left[\int_0^{a_i} \zeta_i d\zeta_i + a_i \int_{a_i}^{\infty} f_i(\zeta_i)d\zeta_i\right] \qquad \text{(II.2.59)}$$

unde $a_i = \sum_j x_{ij}$ este cantitatea totală de marfă primită de punctul de consum i.

Obiectivul problemei este maximizarea funcţiei

$$C(x) = \sum_i R_i(a_i) - \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}. \qquad \text{(II.2.60)}$$

G. B. Dantzig [10] a dovedit că derivata funcţiei $R_i(a_i)$ definită prin (II.2.59) este nedescrescătoare încît sînt îndeplinite condiţiile în care se poate aplica metoda de rezolvare a lui C. M. Shetty pentru problemele de transport cu costuri neliniare.

Un alt model privind problemele de transport cu cereri aleatoare a fost formulat de A. C. Williams [15] în următoarele ipoteze:

— Cererile pentru o marfă anumită, în $j = 1, \ldots, n$ puncte de consum, sînt variabile aleatoare. Se cunoaşte funcţia cumulativă de repartiţie a cererii $F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Nu se fac ipoteze asupra dependenţei sau independenţei cererilor dar se admite că valorile medii ale fiecărei variabile ζ_j; $j = 1, \ldots, n$ există în sensul că sînt finite şi că F este integrabilă prin părţi în sens Rieman-Stieltjes. Metoda de rezolvare este aplicabilă şi în cazul în care unele cereri sînt sigure.

— Fiecare sursă care contribuie la satisfacerea cererilor aleatoare dispune de o cantitate limitată de marfă.

— O cerere nesatisfăcută implică o penalizare iar depăşirea cererii prin aprovizionarea unui consumator cu o cantitate de marfă mai mare decît cererea este de asemenea penalizată. Penalizările se exprimă prin costuri care pot fi interpretate ca costuri de cumpărare, expediţie, pierderi pricinuite de soldarea mărfii, cheltuieli legate de stocuri supranormative etc. Cererile aleatoare se reflectă în funcţia economică prin intermediul costurilor de penalizare încît costul total al operaţiei de aprovizionare este o variabilă aleatoare.

— Matricea $c = \|c_{ij}\|$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ este cunoscută, elementele ei sînt constante.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a ajunge la formularea matematică a problemei se consideră în primul rînd că un singur consumator trebuie să se aprovizioneze de la o sursă unică pentru a satisface o cerere aleatoare cu funcţia de repartiţie $F(z)$. Fie cx costul transportului pentru o cantitate de marfă x. Dacă cererea ζ este mai mare decît cantitatea de marfă primită x, trebuie făcută o comandă suplimentară şi procurarea mărfii necesare costă $\sigma(\zeta - x)$. Dacă cererea ζ este mai mică decît x se cheltuieşte o sumă de bani egală cu $\delta(x - \zeta)$. Se cere să se determine nivelul x al transportului iniţial astfel încît costul mediu al operaţiei de aprovizionare să fie minim. Se presupune că $\sigma > \delta$, caz care apare evident ca singurul interesant.

Costul total al operaţiei $\Phi(\zeta, x)$ este

$$\Phi(\zeta, x) = \begin{cases} cx + \sigma(\zeta - x) & \text{dacă } \zeta \geqslant x \\ cx + \delta(\zeta - x) & \text{dacă } \zeta \leqslant x. \end{cases} \qquad \text{(II.2.61)}$$

Costul mediu al operaţiei este dat de integrala Rieman-Stieltjes

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta, x) = \int_0^\infty \Phi(z, x) dF(x). \qquad \text{(II.2.62)}$$

Integrînd prin părţi avem

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta, x) = (c - \sigma)x + \sigma\alpha + (\sigma - \delta)\int_0^x F(z)dz \qquad \text{(II.2.63)}$$

unde α este valoarea medie a cererii aleatoare ζ şi integrala este luată în sens Rieman.

Dacă $\sigma > \delta$, $\mathbf{E}\Phi(\zeta, x)$ este o funcţie convexă de x. Minimul acestei funcţii este punctul în care se anulează derivata ei, dacă acest punct există. Astfel $\mathbf{E}\Phi(\zeta, x)$ este minimă în punctul x^0 pentru care

$$F(x^0) = \begin{cases} \sigma - c)/(\sigma - \delta) & \text{dacă } \sigma \geqslant c \geqslant \delta \\ 0 & \text{dacă } \sigma \leqslant c. \end{cases} \qquad \text{(II.2.64)}$$

Dacă $c < \delta$ funcţia $\mathbf{E}\Phi(\zeta, x)$ nu are punct minim în interiorul domeniului de definiţie ceea ce apare logic dacă ţinem seamă de interpretarea economică a costurilor c şi δ. În ipoteza că unicul consumator se poate aproviziona de la $i = 1, \ldots, m$ surse plătind pentru transportul unei unităţi de marfă sumele $c_1, \ldots, c_m$ şi că penalizările σ

Scanned with OKEN Scanner

și δ nu depind de sursele de aprovizionare, costul mediu al operației este

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta;\ x_1,\ \ldots,\ x_m) = \sum_i (c_i - \sigma)x_i + \sigma\alpha + (\sigma - \delta)\int_0^{\Sigma x_i} F(z)dz. \tag{II.2.65}$$

Minimul funcției $\mathbf{E}\Phi(\zeta\,;\ x_1,\ \ldots,\ x_m)$ este punctul în care se anulează derivatele ei parțiale, dacă acest punct există. Dacă $c_r = \min_i c_i$ și $c_r > \sigma$ soluția optimă este vectorul $x = 0$, dacă $c_r < \delta$ costul nu este mărginit inferior iar dacă $\sigma \geqslant c_r \geqslant \delta$ atunci funcția $\mathbf{E}\Phi(\zeta\,;\ x_1,\ \ldots,\ x_m)$ este minimă pentru $x_i^0 = 0\,;\ i = 1,\ \ldots,\ m\,;\ i \neq r$, x_r fiind dat de

$$F(x_r^0) = (\sigma - c_r)/(\sigma - \delta).$$

Să considerăm acum cazul în care sursele $i = 1,\ \ldots,\ m$ dispun de cantitățile de marfă $a_i\,;\ i = 1,\ \ldots,\ m$ și în centrele de consum $j = 1,\ \ldots,\ n$ cererile $b_1,\ \ldots,\ b_n$ sînt aleatoare. Matricea costurilor de transport este $c = [c_{ij}]\,;\ i = 1,\ \ldots,\ m\,;\ j = 1,\ \ldots,\ n$. Costurile de penalizare σ_j și δ_j satisfac condițiile

$$\sigma_j \geqslant \min_i c_{ij} \geqslant \delta_j\,;\ \sigma_j > \delta_j \text{ pentru } j = 1,\ \ldots,\ n. \tag{II.2.66}$$

Fie $F(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)$ funcția cumulativă de repartiție a cererii care satisface condițiile

(*i*) $F(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)$ este nulă dacă oricare dintre argumentele ei este negativ;

(*ii*) valorile medii α_j ale variabilelor $b_j\,;\ j = 1,\ \ldots,\ n$ sînt finite;

(*iii*) funcția $F(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)$ este integrabilă prin părți în sens Rieman-Stieltjes.

Problema constă în a determina matricea transporturilor $x = [x_{ij}]\,;\ i = 1,\ \ldots,\ m\,;\ j = 1,\ \ldots,\ n$ care satisface condițiile

$$\sum_j x_{ij} \leqslant a_i \tag{II.2.67}$$
$$x_{ij} \geqslant 0$$

și realizează minimul funcției

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta,\ x) = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} + \int_{P_n} \sum_j \Psi_j(z_j - \sum_i x_{ij})dF(z_1,\ \ldots,\ z_n) \tag{II.2.68}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\Psi_j(\zeta_j - \sum_i x_{ij}) = \begin{cases} (\zeta_j - \sum_i x_{ij})\sigma_j & \text{dacă } \zeta_j \geqslant \sum_i x_{ij} \\ (\zeta_j - \sum_i x_{ij})\delta_j & \text{dacă } \zeta_j \leqslant \sum_i x_{ij} \end{cases} \quad \text{(II.2.69)}$$

iar P_n este octantul nenegativ al spaţiului n-dimensional R^n.

Integrala din expresia funcţiei economice poate fi pusă sub o formă mai simplă, folosind distribuţiile marginale ale variabilelor aleatoare ζ_j ; $j = 1,\ldots,n$. Intervertind ordinea integrării şi însumării, în (II.2.68) avem

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta, x) = \sum_j \{\sum_i c_{ij}x_{ij} + \int_{P_n} \Psi_j(z_j - \sum_i x_{ij}) dF(z_1, \ldots, z_n).$$

Dacă se notează cu $F_j(\zeta_j)$ funcţia marginală de repartiţie a variabilei b_j şi se ţine seamă de expresiile funcţiilor $\Psi(z_j - \sum_i x_{ij})$ date de (II. 2.69), $\mathbf{E}\Phi(\zeta, x)$ se poate scrie într-o formă care generalizează expresia obţinută în cazul sursei şi destinaţiei unice. Avem

$$\mathbf{E}\Phi(\zeta, x) = \sum_j \left\{\sum_i (c_{ij} - \sigma_j)x_{ij} + \sigma_j\alpha_j + (\sigma_j - \delta_j) \int_0^{\sum_i x_{ij}} F_j(z_j)dz_j\right\} \quad \text{(II.2.70)}$$

unde α_j sînt valorile medii ale variabilelor b_j ; $j = 1,\ldots,n$. Funcţia $\mathbf{E}\Phi(\zeta, x)$ este convexă dacă sînt satisfăcute condiţiile $\sigma \geqslant c_r \geqslant \delta$. Se poate presupune că fiecare funcţie marginală de reparaţie F_j este astfel definită încît îndeplineşte condiţia

$$F_j(\sum_i a_i) = 1; \quad j = 1, \ldots, n. \quad \text{(II.2.71)}$$

Dacă unele dintre distribuţiile marginale $F_j(z_j)$ nu îndeplinesc condiţia (II.2.71) aceste funcţii pot fi redefinite pentru $z_j \geqslant \sum_i a_i$ şi această redefinire nu poate afecta funcţia $\Phi(\zeta, x)$ decît pentru vectorii x nerealizabili, adică pentru variabilele x_{ij} pentru care

$$\sum_i \sum_j x_{ij} > \sum_i a_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă unele cereri ζ_h sînt certe, adică $\zeta_h = b_h$ constant, $h \in \{1, \ldots, n\}$ funcţia marginală de repartiţie pentru $\zeta_h = b_h$ este

$$F_h(z_h) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z_h < b_h \\ 1 & \text{pentru } z_h \geqslant b_h. \end{cases} \tag{I.2.72}$$

Dacă se impune condiţia ca cererea constantă b_h să fie integral satisfăcută, costurile de penalizare σ_h şi δ_h vor fi respectiv egale cu M şi $-M$, considerînd M un număr pozitiv, oricît de mare. Termenii corespunzători acestor cereri în funcţia obiectiv $\mathbf{E}\,\Phi(\zeta, x)$ sînt

$$\sum_i (c_{ih} - M)x_{ih} + M\alpha_h + 2M\int_0^{b_h} F_h(z_h)dz_h = \sum_i c_{ih}x_{ih}. \tag{II.2.73}$$

Înainte de a expune algoritmul lui E. C. Wiliams pentru rezolvarea problemei cu restricţiile liniare (II.2.67) avînd ca obiectiv minimizarea funcţiei convexe (II.2.70) vom enunţa algoritmul de descompunere a lui G. B. Dantzig [9] pentru determinarea minimului unei funcţii convexe supusă unui sistem de restricţii liniare.

Fie A o matrice $m \times n$ dimensională, b un vector m-dimensional şi $\Phi(x)$ o funcţie convexă definită în spaţiul vectorial n-dimensional. Se cere să se determine un vector x care satisface restricţiile

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{II.2.74}$$

şi realizează

$$\min \Phi(x).$$

Fie Ω o mulţime mărginită astfel definită încît orice $x \geqslant 0$ pentru care $Ax \leqslant b$ aparţine mulţimii Ω.

Algoritmul lui Dantzig comportă următoarele etape:

Etapa I. Se consideră t puncte $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^t$ care aparţin mulţimii Ω şi se formulează problema de programare liniară

$$\sum_{h=1}^{t} (A\eta^h)\lambda_h \leqslant b\,;\ \sum_{h=1}^{t} \lambda_h = 1\,;\quad \lambda_h \geqslant 0 \tag{II.2.75}$$

$$\min\ z = \sum \Phi(\eta^h)\lambda_h.$$

În problema (II. 2.75) variabilele sînt λ_h; $h = 1, \ldots, t$. Se observă că restricţia $\sum_{h=1}^{t} (A\eta^h)\lambda_h \leqslant b$ este o combinaţie liniară convexă a valorilor pe care le ia $Ax \leqslant b$ în punctele $\eta^1, \eta^2, \ldots \eta^t$ iar funcţia obiectiv este aceeaşi combinaţie liniară convexă a valorilor funcţiei $\Phi(x)$ în

punctele $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^t$. A găsi soluția optimă a problemei (II.2.75) înseamnă în fond a găsi acea combinație liniară convexă a punctelor $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^t$ care satisface sistemul cînd aceeași combinație liniară a valorilor funcției $\Phi(x)$ în punctele $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^t$ este minimă.

Fie λ^t, soluția optimă a problemei (II.2.75)

Etapa II. Se definește punctul

$$x^t = \sum_h \eta^h \lambda_h^t \qquad \text{(II.2.76)}$$

deci x^t este un punct în Ω determinat prin acea combinație liniară a punctelor η^h; $h = 1, \ldots, t$ din Ω care constituie soluția optimă a problemei (II.2.75).

Etapa III. Fie (π^t, ρ^t) o soluție optimă dual pentru programul (II.2.75). Se construiește funcția

$$f(x) = -\pi^t A x - \rho^t + \Phi(x) \qquad \text{(II.2.77)}$$

și se determină minimul acestei funcții cu singura condiție ca $x \in \Omega$. Se notează cu η^{t+1} punctul din mulțimea Ω pentru care $f(x)$ este minim. Dispunînd acum de $t+1$ puncte în Ω se reia aplicarea algoritmului de la etapa I și se definește punctul x^{t+1} și soluția (π^{t+1}, ρ^{t+1}).

Dantzig demonstrează că șirul $\{x^t, x^{t+1}, \ldots\}$ converge către un punct x^0 care este soluția optimă a problemei (II. 2.74) și că funcția (II.2.77) dă o margine a diferenței $\Phi(x^t) - \Phi(x^0)$.

Construcția funcției $f(x)$ pare arbitrară dar este ușor de arătat că are o strînsă legătură cu criteriul folosit în metoda simplex pentru determinarea vectorului care intră în bază. În adevăr să considerăm că în problema (II.2.75) se adaugă o nouă variabilă λ încît modelul ei este

$$\begin{aligned}
&(A\eta^1)\lambda_1 + (A\eta^2)\lambda_2 + \ldots + (A\eta^t)\lambda_t + (A\eta)\lambda \leqslant b \\
&\lambda_1 + \quad \lambda_2 + \ldots + \quad \lambda_t + \quad \lambda = 1 \qquad \text{(II.2.78)} \\
&\Phi(\eta^1)\lambda_1 + \Phi(\eta^2)\lambda_2 + \ldots + \Phi(\eta^t)\lambda_t + \Phi(\eta)\lambda = z \min
\end{aligned}$$

Soluția λ^t este optimă și pentru noul program dacă diferența $z_j - c_j$ corespunzătoare variabilei λ este negativă. Se știe că $z_j = c_B B^{-1} a_j = \sum_i \pi_i a_{ij}$ încît variabilei λ îi corespunde diferența $\pi^t A\eta + \rho^t - \Phi(\eta)$.

Dacă presupunem că oricărui punct $\eta \in \Omega$ îi corespunde o variabilă în problema (II.2.78) și că pentru unele dintre aceste variabile diferențele $z_j - c_j$ sînt negative variabila care intră în bază este cea care corespunde $\max_j (z_j - c_j)$. Aceste considerații justifică etapa III.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul expus este aplicabil problemei de transport cu costuri neliniare (II.2.67) (II.2.70) deoarece $E\Phi(\zeta, x)$ este o funcție convexă. Mulțimea Ω pentru această problemă se alege astfel încît coordonatele x_{ij} ale tuturor punctelor $x \in \Omega$ să satisfacă condițiile $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \sum_i a_i$.

Un punct η din Ω este numit *plan de distribuire* și constituie o specificație completă a expedițiilor de la sursele $i = 1, \ldots, m$ la punctele de consum $j = 1, \ldots, n$. Fiecărui plan de distribuire îi este asociat un *plan de aprovizionare* compus din m numere $y_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}$. Atît planurile de distribuire cît și planurile corespunzătoare de aprovizionare asociate nu sînt obligatoriu realizabile, adică nu sînt constrînse să satisfacă sistemul $\sum_j x_{ij} \leqslant a_i$; $i = 1, \ldots, m$ dar deoarece $\eta \in \Omega$, satisfac condițiile $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \sum_i a_i$.

Etapa I. Se consideră t puncte $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^t$ aparținînd mulțimii Ω și se scrie programul liniar

$$\sum_{h=1}^{t} \left(\sum_j \eta_{ij}^h\right) \lambda_h \leqslant a_i; \quad \sum_{h=1}^{t} \lambda_h = 1; \quad \lambda_h \geqslant 0$$
$$\min z = \sum_{h=1}^{t} q^h \lambda_h \tag{II.2.79}$$

unde

$$q^h = \sum_{ij} \{(c_{ij} - \sigma_j)\eta_{ij}^h\} + \sum_j \left\{ (\sigma_j - \delta_j) \int_0^{\sum_i \eta_{ij}^h} F_j(z_j)\, dz_j \right\}.$$

Observăm că termenul constant $\sigma_j \alpha_j$ din (II.2.70) a fost scris în q^h.

Planului de aprovizionare determinat de planul de distribuire η^h îi corespunde costul mediu q^h. În etapa I se caută printre toate combinațiile liniare convexe ale planurilor de aprovizionare care conduc la un plan realizabil acea combinație pentru care și costul mediu este minim.

Etapa II este identică cu etapa corespunzătoare a algoritmului Dantzig.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa III. Se caută minimul funcţiei

$$f(\eta) = \sum_j \left\{ \sum_i [(c_{ij} - \pi_i) - \sigma_j]\, \eta_{ij} + (\sigma_j - \delta_j) \int_0^{\sum_i \eta_{ij}} F_j(z_j)\, dz_j \right\} \quad \text{(II.2.80)}$$

cu condiţia

$$0 \leqslant \eta_{ij} \leqslant \sum_i a_i$$

(π^t, ρ^t) fiind soluţia optimă duală a problemei (II.2.79). Minimul funcţiei $f(\eta)$ definită de (II.2.80) se poate găsi minimizînd fiecare din termenii

$$\sum_i (c_{ij} - \pi_i - \sigma_j) y_i + (\sigma_j - \delta_j) \int_0^{\sum_i y_i} F_j(z_j)\, dz_j \quad \text{(II.2.81)}$$

cu condiţia $y_i \geqslant 0$. Funcţia (II.2.80) nu diferă de funcţia (II.2.63) care reprezintă costul mediu al aprovizionării unui singur consumator de către m surse, decît prin aceea că c_i sînt înlocuiţi prin $c_{ij} - \pi_j$. Metoda indicată pentru determinarea minimului funcţiei (II.2.63) este aplicabilă deci şi funcţiei (II.2.80).

Prin aplicarea algoritmului se construieşte un şir de soluţii care converge către soluţia optimă a problemei de transport.

În rezumat, tipurile de probleme de transport cu cereri aleatoare care au fost discutate în acest paragraf se pot împărţi în două categorii deosebite din punct de vedere al informaţiilor de care dispunem asupra cererii aleatoare.

Prima categorie cuprinde problemele în care fiecare cerere aleatoare b_j poate lua orice valoare reală într-un interval $[b_j^1, b_j^2]$. Acest interval este împărţit în subintervale (egale sau nu) şi pentru fiecare subinterval se pot determina frecvenţele absolute, frecvenţele relative şi densitatea de probabilitate.

În practică aceste informaţii pot fi îndeobşte obţinute cu uşurinţă şi atunci obiectivul problemei este determinarea unui plan realizabil de transport care realizează minimul funcţiei

$$z = \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_j C_j \sum_h \gamma_{hj}\, y_{hj} \quad \text{(II.2.82)}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care c_{ij} este costul transportului unei unități de marfă din i în j;
C_j — beneficiul realizat din vînzarea unei unități de marfă în j;
γ_{hj} — probabilitatea ca cererea în j să fie mai mare sau cel puțin egală cu marginea superioară a subintervalului h;
$\sum_h y_{hj} = y_j$ este nivelul cererii în j.

Pentru a doua categorie de probleme se presupune că se cunosc funcțiile densitate de probabilitate $f_j(z_j)$ pentru fiecare cerere aleatoare b_j sau funcția cumulativă de repartiție a cererii $F(z_1, \ldots, z_n)$ deci și funcțiile marginale de repartiție $F_j(z_j)$. Pentru rezolvarea problemei este suficient să fie cunoscute $F_j(z_j)$. Bineînțeles că, dispunînd de aceste funcții, se pot obține și informațiile care au fost considerate cunoscute pentru prima categorie de probleme. Modelele la care s-a ajuns nu diferă din cauza informațiilor de care dispunem în legătură cu variația cererii ci din cauza criteriilor economice care stau la baza calculării „costului de operație".

Dacă prin costul total al operației se înțelege costul de transport la care se adaugă costul de cumpărare al mărfii și acest cost depinde de volumul de marfă furnizat de fiecare sursă, funcția obiectiv este de forma

$$C(x) = -\sum_i R_i(a_i) + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad \text{(II.2.83)}$$

unde:

$$R_i(a_i) = k_i \left| \int_0^{a_i} \zeta_i \, d\zeta_i + \int_{a_i}^{\infty} f_i(\zeta_i) d\zeta_i \right|$$

c_{ij} este costul transportului unei unități de marfă;
k_i — beneficiul realizat prin vînzarea unei unități de marfă în i;
$f_i(\zeta_i)$ — funcția densitate de probabilitate a cererii aleatoare în i;
a_i — cantitatea de marfă primită în centrul de consum i.

Dacă prin costul total al operației se înțelege costul transportului și al penalizărilor pricinuite de supradimensionarea sau subdimensionarea disponibilului de marfă în centrele de consum față de cererea actuală, funcția economică este de forma

$$\mathbf{E\Phi}(\zeta, x) = \sum_j \left\{ \sum_i (c_{ij} - \sigma_j) x_{ij} + \sigma_j \alpha_j + (\sigma_j - \delta_j) \int_0^{\sum_i x_{ij}} F_j(z_j) dz_j \right\} \qquad \text{(II.2.84)}$$

în care c_{ij} este costul transportului unei unități de marfă din i în j;

σ_j și δ_j sînt costuri de penalizare;

$F_j(z_j)$ este funcția marginală de repartiție a cererii b_j;

$\alpha_j = \int_0^\infty z_j \, dF_j(z_j)$ — valoarea medie a cererii b_j.

Diferența dintre funcțiile economice (II.2.83) și (II.2.84) nu este esențială. În adevăr, dacă înlocuim limita superioară $\sum_i x_{ij}$, a integralei din (II.2.84) prin y_j care este nivelul cererii în j și apoi luăm

$$y_j = y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{kj}$$

unde y_{kj}; $h = 1, \ldots, K$ sînt definiți de relațiile (II.2.6), avem

$$\int_0^{y_j} F_j(z_j)dz_j = \sum_{h=1}^{K} \int_{y_{h-1,j}}^{y_{h,j}} F_j(z_j)dz_j = \sum_{h=1}^{K} \mathbf{P}(y_{h-1j} \leqslant y_j < y_{h,j}) = \sum_{h=1}^{K} p_{hj}.$$

Dacă cererea $y_j = y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{tj}$; $t < K$ atunci

$$\int_0^{y_j} F_j(z_j)dz_j = \sum_{h=1}^{t} p_{hj} = 1 - \sum_{h=t}^{K} p_{hj} = 1 - \gamma_{hj}.$$

Dînd o interpretare convenabilă coeficienților k_i, σ_j și δ_j care intervin în aceste funcții economice se poate stabili echivalența lor. Diferitele moduri de a concepe costul total al operației de aprovizionare sînt importante în aplicațiile practice fiindcă sînt legate de situațiile reale în care se cere rezolvarea problemelor.

Oricare ar fi modul în care este construită funcția economică a unei probleme de transport cu cereri aleatoare, această funcție este o variabilă aleatoare și se poate pune problema determinării funcției de repartiție a minimului ei.

Această temă a fost tratată de B. Bereanu [1] [3] [4] pentru cazul cînd cererile aleatoare sînt de forma

$$b_j + t_j(\omega); \quad j = 1, \ldots, n \tag{II.2.85}$$

unde $t_j(\omega)$ sînt valorile aleatoare care satisfac condițiile

$$v_j \leqslant t_j(\omega) \leqslant v_j'; \quad j = 1, \ldots, n \tag{II.2.86}$$

și b_j sînt numere nenegative care satisfac condițiile

$$b_j + \mathfrak{v}_j \geqslant 0\,; \quad j = 1, \ldots, n \tag{II.2.87}$$

$$\sum_i a_i \geqslant \sum_j (b_j + \mathfrak{v}'_j). \tag{II.2.88}$$

Se presupune că densitatea mixtă de probabilitate $\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ a variabilelor aleatoare $t_j(\omega)\,;\ j = 1, \ldots, n$ este cunoscută.

Variabila aleatoare $\gamma(\omega)$ pentru care se determină funcția de repartiție $G(z)$ este

$$\gamma(\omega) = \min \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij} \tag{II.2.89}$$

minimul fiind luat pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{aligned} &\sum_j x_{ij} \leqslant a_i\,; \quad i = 1, \ldots, m \\ &\sum_i x_{ij} = b_j + t_j(\omega)\,; \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{II.2.90}$$

Pentru determinarea funcției $G(z)$, B. Bereanu [1], [3] consideră inițial variabilele aleatoare $t_j(\omega)$ ca fiind parametri care iau valori în intervalele finite $[\mathfrak{v}_j, \mathfrak{v}'_j]$ și rezolvă problema (II.2.89)—(II.2.90). În baza condiției (II.2.88) problema parametrică de transport admite o soluție optimă pentru cererile $b_j + \mathfrak{v}'_j\,;\ j = 1, \ldots, n$ în care, unele dintre variabilele de abatere $x_{i,\,n+1}$ folosite pentru transformarea inecuațiilor $\sum_j x_{ij} \leqslant a_i$ în ecuații, vor lua valori nenule. Fie $x^1 = \{x^1_{i,\,j}\}\,;$ $i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, n+1$ matricea soluție pentru cererile $b' = \{b_j + \mathfrak{v}'_j\}\,;\ j = 1, \ldots, n$. Notăm cu I_1 și J_1 mulțimea de indici i și j asociați elementelor pozitive ale matricei soluție x^1. Dacă acum se înlocuiește $\mathfrak{v}'_j$ prin t_j, $x^1_{ij}\,;\ i \in I_1$ și $j \in J_1$ componentele pozitive ale soluției optime x^1, se exprimă ca funcții liniare de t_j adică

$$\begin{gathered} x^1_{ij} = \alpha^1_{1,p}\, t_1 + \alpha^1_{2,p}\, t_2 + \ldots + \alpha^1_{np}\, t_n + \alpha^1_{n+1,p} \\ i \in I_1,\ j \in J_1, \quad 1 \leqslant p \leqslant m + n - 1 \end{gathered} \tag{II.2.91}$$

în care $\alpha^1_{j,k}\,;\ j = 1, \ldots, n+1$ sînt constante. Matricea $x^1 = [x^1_{ij}]$ rămîne optimă pentru toate valorile parametrilor $t_j\,;\ j = 1, \ldots, n$ cuprinse în dreptunghiul n-dimensional T definit de

$$\mathfrak{v}_j \leqslant t_j \leqslant \mathfrak{v}'_j$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care x_{ij}^1; $i \in I$, $j \in J$, sînt nenegative. Condiţiile $x_{ij}^1 \geqslant 0$; $i \in I_1$, $j \in J_1$ determină un polyhedru convex Γ_1 în spaţiul R^n mărginit de $(m + n - 1)$ hiperplane L_k^1 cu ecuaţiile

$$L_p^1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,p} t_j + \alpha_{n+1,p} \qquad \text{(II.2.92)}$$

încît matricea $x^1 = [x_{ij}^1]$ îşi păstrează caracterul de soluţie optimă a problemei parametrice de transport pentru toate valorile parametrilor $(t_1, \ldots, t_n) \in T_1 = T \cap \Gamma_1$. Valoarea funcţiei obiectiv $\gamma^1(t)$ pentru $(t_1, \ldots, t_n) \in T_1$ este o funcţie liniară de $t_1, \ldots, t_n$

$$\gamma^1(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}^1 = \gamma_0^1 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j t_j. \qquad \text{(II.2.93)}$$

Bazele optime care corespund parametrilor $(t_1, \ldots, t_n) \in T - T_1$ se obţin considerînd punctele situate, de exemplu, în semispaţiul

$$\alpha_{1,l}^1 t_1 + \alpha_{2,l}^1 t_2 + \ldots + \alpha_{n,l}^1 t_n + \alpha_{n+1,l}^1 \leqslant 0 \qquad \text{(II.2.94)}$$

pentru care unul dintre elementele matricei x^1 devine negativ.

Fie de exemplu $x_{rt}^1 < 0$ cînd este satisfăcută condiţia (II.2.94).

Pentru a găsi o nouă soluţie optimă se procedează astfel:

— se calculează preţurile comparative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j$ pentru toate variabilele care nu aparţin bazei;

— se formează toate ciclurile care conţin variabila x_{rt}^1 şi o singură variabilă x_{ij}; $i \notin I_1$, $j \notin J_1$ situată într-un vîrf de aceeaşi paritate cu cel ocupat de x_{rt}^1;

— dintre toate variabilele x_{ij} cu care se pot forma astfel de cicluri se introduce în bază variabila x_{ij} căreia îi corespunde cel mai mic cost comparativ $\bar{c}_{ij}$.

Dacă nu se poate forma nici un ciclu, în condiţiile indicate, înseamnă că problema nu are soluţii pentru $(t_1, \ldots, t_n)$ care satisfac (II.2.93), caz care nu se poate prezenta în ipotezele admise pentru problema de care ne ocupăm. Aplicînd regulile indicate se găseşte deci matricea optimă $x^2 = [x_{ij}^2]$ şi se determină poliedrul convex T^2. Este evident că poliedrele T^1 şi T^2 nu au puncte interioare comune. După un număr finit de schimbări de bază se obţin r poliedre convexe fără puncte interioare comune astfel ca

$$\bigcup_{k=1}^{r} T^k = T.$$

Scanned with OKEN Scanner

B. Bereanu numește poliedrele T^k *regiuni caracteristice*. Pentru toate valorile parametrilor t_j; $j = 1, \ldots, n$ dintr-o regiune caracteristică, T^k baza optimă pentru toți $t \in T^k$ este aceeași. $\gamma^k(t)$ este o funcție liniară de t_j, adică

$$\gamma^k(t) = \gamma_0^k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^k t_j; \qquad k = 1, \ldots, r.$$

Dacă t_j sînt variabile aleatoare $t_j(\omega)$, $\gamma(t)$ este de asemenea o variabilă aleatoare pe care o vom nota cu $\gamma(\omega)$. Această variabilă poate lua o valoare mai mică decît un număr dat z cînd vectorul $t(\omega) = (t_1, \ldots, t_n)$ aparține oricăreia dintre regiunile T^k; $k = 1, \ldots, r$.

Fie A evenimentul $\gamma(\omega) < z$ și

B_k evenimentul $t(\omega) \in T^k$; $k = 1, \ldots, r$

Atunci,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(A/B_k) \tag{II.2.95}$$

dar

$$\mathbf{P}(A/B_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_k)}{\mathbf{P}(B_k)} = \frac{\mathbf{P}[(\gamma(\omega) < z) \cap (t(\omega) \in T_k)]}{\mathbf{P}(B_k)} \tag{II.2.96}$$

Din (II.2.95) și (II.2.96) rezultă că

$$\mathbf{P}[\gamma(\omega) < z] = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}[\gamma(\omega) < z) \cap (t(\omega) \in T_k)]$$

deci funcția de repartiție $G(z)$ a variabilei $\gamma(\omega)$ este

$$G(z) = \sum_{k=1}^{r} \int_{\overline{T}^k} \varphi(\zeta)d\zeta \tag{II.2.97}$$

unde $\overline{T}^k(z) = T^k \cap [t|g^k(\omega) < z)$.

De aici se deduce cu ușurință că valoarea medie a funcției $\gamma(\omega)$ este

$$\mathbf{E}\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \int_{T^k} \gamma^k(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{II.2.98}$$

B. Bereanu [3] mai stabilește și funcțiile de repartiție $H_i(z)$ ale valorilor variabilelor aleatoare $h_i(\omega) = x^*_{i,n+1}$; $i = 1, \ldots, m$ în soluțiile optime arătînd că

$$H_i(z) = \sum_{k=1}^{r} \int_{T^{*k}} \varphi(\zeta)d\zeta \tag{II.2.99}$$

în care $T^{*k} = T^k \cap [x^k_{i,n+1} < z]$.

De asemenea se poate calcula

$$\mathbf{E}h_i(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \int_{T^k} x_{i,n+1}^k \varphi(\zeta) d\zeta. \qquad \text{(II.2.100)}$$

Exemplul V. Vom aplica formulele stabilite pentru problema de transport cu matricea costurilor

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

disponibilul în centrele de depozitare fiind $a_1 = 100$, $a_2 = 120$, $a_3 = 180$ şi cererile $b_1 = 150 - \tau(\omega)$, $b_2 = 80 + 3\tau(\omega)$, $b_3 = 100 + \tau(\omega)$; $b_4 = 70 + 2\tau(\omega)$; $\tau(\omega)$ este o variabilă aleatoare continuă cu valori în intervalul $[0, 30]$ şi cu densitatea de probabilitate $\varphi(\tau) = \frac{1}{300} \cdot \left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right)$. În acest exemplu totalul de marfă de care dispun depozitele $i = 1, 2, 3$ este egală cu $\sum_1^4 b_j$ dacă $\tau(\omega) = 0$. Determinarea unei soluţii optime a problemei parametrice de transport se poate urmări cu uşurinţă în tabelele 53—55 în care apare o linie $i = 4$, deci un depozit fictiv menit să „acopere" cererile care depăşesc disponibilul din depozitele reale.

Soluţia din tabelul 55 este optimă pentru $0 \leqslant t \leqslant \frac{40}{3}$ şi $\gamma^1(t) = 2100 - 19t$. Pentru $t > \frac{40}{3}$, $x_{21} < 0$. Pentru a obţine o soluţie optimă în cazul $t > \frac{40}{3}$ s-au calculat $\bar{c}_{ij}$ pentru toţi $x_{ij} \notin B$. Cele mai mici valori ale costurilor comparative $\bar{c}_{ij}$ corespund variabilelor x_{11}, x_{23}, x_{24} dar acestea, fiind în aceeaşi linie sau coloană cu variabila x_{21} care trebuie eliminată din bază, nu pot aparţine unor cicluri care să le conţină în vîrfuri de paritate diferită cu vîrful ocupat de x_{21}. Următorul $\bar{c}_{ij}$ minim este $\bar{c}_{34}$ dar nici acesta nu poate fi utilizat. Urmărind patratele cu $\bar{c}_{ij} = 3$ găsim că variabila x_{32} corespunde cerinţelor încît luînd $\theta = -40 + 3t$ se găseşte soluţia înscrisă în tabelul 56.

Scanned with OKEN Scanner

(53)

	6	$70-\theta$ 9	$30+\theta$ 6	100 u_i −6
(−1) 5	$80+3t$ 4	11	$40-3t$ 8	120 −8
$150-t$ 3	5	$30+t$ 8	7	180 −5
0	0	θ (−3) 0	$5t-\theta$ 0	$5t$ 0
$150-t$ vj 2	$80+3t$ 4	$100+t$ −3	$70+2t$ 0	

$\theta = 5t$

(54)

	6	$70-5t-\theta$ 9	$30+5t+\theta$ 6	100 u_i −9
θ (−1) 5	$80+3t$ 4	11	$40-3t-\theta$ 8	120 −11
$150-t-\theta$ 3	5	$30+t+\theta$ 8	7	180 −8
0	0	$5t$ 0	0	$5t$ 0
$150-t$ vj 5	$80+3t$ 7	$100+t$ 0	$70+2t$ 3	

$\theta = 40-3t$

Scanned with OKEN Scanner

(55)

① 5	③ 6	$30-2t$ 9	$70+2t$ 6	100 u_i −9
$40-3t+\theta$ 5	$80+3t-\theta$ 4	① 11	① 8	120 −10
$110+2t-\theta$ 3	θ ③ 5	$70-2t$ 8	② 7	180 −8
⑤ 0	⑥ 0	$5t$ 0	③ 0	$5t$ 0
$150-t$ v_j 5	$80+3t$ 6	$100+t$ 0	$70+2t$ 3	

$\theta = -40+3t$

(56)

① 5	⓪ 6	$30-2t-\theta$ 9	$70+2t+\theta$ 6	100 u_i −9
③ 5	120 4	④ 11	④ 8	120 −7
$150-t$ 3	$-40+3t$ 5	$70-2t+\theta$ 8	② 7	180 −8
⑤ 0	③ 0	$5t$ 0	③ 0	$5t$ 0
$150-t$ v_j 5	$80+3t$ 3	$100+t$ 0	$70+2t$ 3	

$\theta = 30-2t$

Scanned with OKEN Scanner

Din condiţiile $x_{ij} \geqslant 0$ se găseşte că această soluţie este optimă pentru $\frac{40}{3} \leqslant t \leqslant 15$; calculînd valoarea funcţiei economice pentru soluţia din tabelul 56 se obţine $\gamma^2(t) = 1980 - 10t$. Pentru $t > 15$ trebuie exclusă din bază x_{13}. Aplicînd aceeaşi metodă se găsesc soluţiile optime pentru $15 \leqslant t \leqslant 25$ şi $25 \leqslant t \leqslant 30$. În tabelul 57 s-au înregistrat valorile optime ale funcţiei obiectiv pentru fiecare subinterval de variaţie a lui t şi valorile nenule ale variabilelor $x_{4,j}$, $j = 1, \ldots, 4$.

(57)

T^k	$0 \leqslant t \leqslant \frac{40}{3}$	$\frac{40}{3} \leqslant t \leqslant 15$	$15 \leqslant t \leqslant 25$	$25 \leqslant t \leqslant 30$
$\gamma^k_{(t)}$	$2100-19t$	$1980-10t$	$1920-6t$	$1820-2t$
$x^*_{4,j}$	$x^*_{4,3} = 5t$	$x^*_{4,3} = 5t$	$x^*_{4,3} = 5t$	$x^*_{4,3} = 100 + t$ $x^*_{4,4} = -100 + 4t$

Regiunile de decizie T^k sînt, în acest exemplu, subintervale din $T = [0, 30]$. Funcţia de repartiţie $G(z)$ este

$$G(z) = \sum_{k=1}^{4} \int_{T^k} \frac{1}{300}\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau.$$

Să admitem că vrem să ştim care este probabilitatea ca totalul transporturilor să coste mai puţin de 1986 lei, deci, ne interesează $\mathbf{P}[\gamma(\omega) < 1986]$. Vom determina $\overline{T}^k = T^k \cap [t|\gamma^k(\omega) \leqslant z]$. Pentru aceasta se rezolvă sistemele $\gamma^k(t) < z$ şi apoi se iau intersecţiile cu T^k. Avem:

$$\gamma^1(t) = 2100 - 19t \leqslant 1986 \text{ pentru } t \geqslant 6$$

$$\text{deci } \overline{T}^1 = (t \geqslant 6) \cap \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{40}{3}\right) = \left(6 \leqslant t \leqslant \frac{40}{3}\right)$$

$$\gamma^2(t) = 1980 - 10t \leqslant 1986 \text{ pentru } t \geqslant -\frac{6}{10}$$

$$\text{deci } \overline{T}^2 = \left(t \geqslant -\frac{6}{10}\right) \cap \left(\frac{40}{3} \leqslant t \leqslant 15\right) = \left(\frac{40}{3} \leqslant t \leqslant 15\right)$$

$$\gamma^3(t) = 1920 - 6t \leqslant 1986 \text{ pentru } t \geqslant -11$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{deci } \overline{T}^3 = (t \geqslant -11) \cap (15 \leqslant t \leqslant 25) = (15 < t \leqslant 25)$$

$$\gamma^4(t) = 1820 - 2t \leqslant 1986 \text{ pentru } t \geqslant -83$$

$$\text{deci } \overline{T}^4 = (t \geqslant -83) \cap (25 \leqslant t < 30) = (25 \leqslant t \leqslant 30).$$

Observînd că $\gamma(t)$ este mai mic decît 1986 pe tot intervalul de variație a lui t, cu excepția subintervalului $[0, 6]$, se poate scrie că

$$\mathbf{P}(\gamma(\omega) < 1986) = 1 - \int_0^6 \frac{1}{300}\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau = 1 - 0{,}0272 = 97{,}28\%.$$

Costul mediu al transportului este

$$\mathbf{E}\gamma(\omega) = \frac{1}{300}\left[\int_0^{\frac{40}{3}} (2100 - 19\tau)\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau + \int_{\frac{40}{3}}^{15} (1980 - 10\tau)\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{15}^{25} (1920 - 6\tau)\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau + \int_{25}^{30} (1820 - 2\tau)\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau\right] = 1663{,}58 \text{ lei.}$$

Ca aplicație a formulei (II.2.99) vom calcula probabilitatea ca $x^*_{4,3} < 60$. Variabila aleatoare $x^*_{4,3}$ reprezintă o cantitate de marfă expediată din depozitul cu indicele $i = 4$ în centrul de consum $j = 3$. Depozitul cu indicele 4 este un depozit fictiv încît $x^*_{4,3}$ arată cu ce cantitate nu este satisfăcută cererea de marfă în al treilea punct de consum. Calculînd $\mathbf{P}(x^*_{4,3} < 60)$ vom cunoaște care este probabilitatea ca cererea în $j = 3$ să nu fie satisfăcută cu mai puțin de 60 unități. Vom determina mulțimile $T^{*k} = T^k \cap [x^*_{4,3} < 60]$. Avem

$$x^*_{4,3} = 5t < 60 \text{ dacă } t < 12 \text{ încît } T^{*1} = \left[0 \leqslant t \leqslant \frac{40}{3}\right] \cap (t < 12) =$$

$= [0,12]$ $T^{*2} = \left[\frac{40}{3} \leqslant t \leqslant 15\right] \cap (t < 12) = \varnothing$, de asemenea, T^{*3} și T^{*4} sînt mulțimi vide încît

$$\mathbf{P}(x^*_{4,3} < 60) = \int_0^{12} \frac{1}{300}\left(\frac{3\tau^2}{100} + 1\right) d\tau = 0{,}0976 = 9{,}76\%.$$

Valoarea medie a cererii nesatisfăcute în punctul de consum $j = 3$ se calculează cu formula (II.2.100). Din tabelul 57 citim valorile variabilei $x^*_{4,3}$ pe fiecare interval T^k și avem

$$\mathbf{E}(x^*_{4,3}) = \int_0^{\frac{40}{3}} 5\tau\varphi(\tau)d\tau + \int_{\frac{40}{3}}^{15} 5\tau\varphi(\tau)d\tau + \int_{15}^{25} 5\tau\varphi(\tau)d\tau + \int_{25}^{30} (100+\tau)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{5}{300}\int_0^{25}\left(\frac{3\tau^2}{100}+\tau\right)d\tau + \frac{1}{300}\int_{25}^{30}(100+\tau)\left(\frac{3\tau^2}{100}+1\right)d\tau \simeq 82{,}51 \text{ unități.}$$

Din acest exemplu reiese că informațiile care se obțin cunoscînd distribuțiile $G(z)$ și $H_i(z)$ au o mare importanță în practică.

Dacă vectorul aleator $t(\omega)$ are mai mult de două componente determinarea regiunilor caracteristice devine dificilă pentru că necesită rezolvarea unui sistem de $m + n - 1 + 2s$ inecuații [s fiind numărul componentelor vectorului $t(\omega)$]. Vom rezolva acum și problema deterministică de transport cu cererile $\mathbf{E}b_j$, $j = 1, \ldots, 4$. În acest scop calculăm

$$\mathbf{E}\tau(\omega) = \frac{1}{300}\int_0^{30}\tau\left(\frac{3\tau^2}{100}+1\right)d\tau = 21{,}75.$$

Cererile medii în cele patru centre de consum sînt:

$$\mathbf{E}b'_1 = b_1 - \mathbf{E}\tau(\omega) = 150 - 21{,}75 = 128{,}25$$

$$\mathbf{E}b'_2 = b_2 + 3\mathbf{E}\tau(\omega) = 80 + 65{,}25 = 145{,}25$$

$$\mathbf{E}b'_3 = b_3 + \mathbf{E}\tau(\omega) = 100 + 21{,}75 = 121{,}75$$

$$\mathbf{E}b'_4 = b_4 + 2\mathbf{E}\tau(\omega) = 70 + 43{,}50 = 113{,}50.$$

$\sum_{j=1}^{4}\mathbf{E}b'_j = 508{,}75$. Deoarece $\sum_{i=1}^{3} a_i = 400$ vom accepta existența unui depozit fictiv cu disponibilul de $a_4 = 108{,}75$ unități. Pentru ca să nu lucrăm cu numere zecimale se înmulțesc a_i și $\mathbf{E}b'_j$ cu 100. Soluția optimă a acestei probleme este înregistrată în tabelul 58. Costul minim al transporturilor necesare aprovizionării centrelor de consum este $\gamma(\mathbf{E}b') = 1789{,}50$ deci mai mare decît $\mathbf{E}g(\omega)$ pentru care s-a găsit

Scanned with OKEN Scanner

5	6	9	10.000 6	10 000 1
5	12.000 4	11	8	12 000 1
12 825 3	2 525 5	1 100 8	1 350 7	18 000 0
0	0	10 875 0	0	10 875 8
12.825 −3	14 525 −5	12 175 −8	11 350 −7	

valoarea de 1663,58 lei. Din soluţia optimă a problemei deterministice şi în special din iteraţiile care conduc la această soluţie se observă tendinţa ca centrul de consum cu costurile cele mai mari de transport să fie aprovizionat sub nivelul cererii. Această observaţie subliniază necesitatea folosirii costurilor de penalizare pentru cererile nesatisfăcute sau un oricare alt mijloc care face ca cererea aleatoare să apară în funcţia economică ponderată şi de alt criteriu decît al costurilor de transport.

Să revenim la problema generală a transporturilor stochastice cu modelul

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \qquad ; \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j + t_j(\omega) \quad ; \quad j = 1, \ldots, n \qquad \text{(II.2.101)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} (b_j + t_j(\omega))$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\gamma(t) = \min \sum_{i=}^{m} \sum_{j=1}^{n+} c_{ij}\, x_{ij} \qquad \text{(II.2.102)}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care: — matricea costurilor de transport $c = \|c_{ij}\|\ i = 1, m\ ;\ j = 1, \ldots, n$ are toate elementele nenegative iar $c_{i,n+1} = 0$;

— vectorul aleator $t(\omega)$ cu componentele $t_j(\omega)$ $j = 1, \ldots, n$ este definit pe dreptunghiul n-dimensional T determinat de

$$0 \leqslant \tau_j \leqslant t_j(\omega) \leqslant \tau_j';$$

— componentele $t_j(\omega)$ ale vectorului $t(\omega)$ sînt variabile aleatoare independente cu valori *nenegative*;

— densitatea de probabilitate $\varphi(\zeta)$ a variabilei $t(\omega)$ este cunoscută.

Dacă cantitatea totală de marfă $\sum_i a_i$ disponibilă în depozitele $i = 1, \ldots, m$ este mai mare decît cea mai mare cerere totală posibilă, adică dacă

$$\sum_i a_i \geqslant \sum_j (b_j + \tau') \qquad \text{(II.2.103)}$$

atunci minimul funcţiei $g(\omega)$ există şi este finit pentru orice $t(\omega) \in T$. Fie T^k, $k = 1, \ldots, r$ regiunile de decizie ale problemei (II.2.101)—(II.2.102) şi x^k, $k = 1, \ldots, r$ soluţiile optime corespunzătoare.
S-a arătat că

$$\bigcup_{k=1}^{r} T^k = T.$$

Componentele pozitive ale soluţiei $x^k = [x_{ij}^k]$ asociate regiunii T^k, $k = 1, \ldots, r$ sînt funcţii liniare de t_j încît se pot scrie sub forma

$$x_{ij}^k = \alpha_{n+1,p}^k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,p}^k\ t_j\ ;\ p = 1, \ldots, (m + n - 1) \text{ pentru } x_{ij}^k > 0. \qquad \text{(II.2.104)}$$

Valoarea minimă a funcţiei obiectiv $\gamma(\omega)$ pentru $t(\omega) \in T^k$ este o funcţie liniară de t_j, $j = 1, \ldots, n$ şi poate fi scrisă sub forma

$$\gamma^k(\omega) = \gamma(x^k) = \gamma_0^k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^k t_j \qquad \text{(II.2.105)}$$

B. Bereanu [4] numeşte *matrice a optimelor*, matricea ai cărei vectori coloană sînt $(\gamma_0^k, \gamma_1^k, \ldots, \gamma_n^k)$. Dacă T conţine r regiuni caracteristice şi vectorul $t(\omega)$ are n componente, matricea optimelor $U = \|\gamma_j^k\|$ are k coloane şi $n + 1$ linii, $k = 1, \ldots, r$; $j = 0, \ldots, n$. Dacă toate componentele vectorului $t(\omega)$ sînt nenegative şi toate elementele matricei $c = \|c_{ij}\|$ sînt pozitive, matricea optimelor are toate elementele nene-

Scanned with OKEN Scanner

gative, și variabilele aleatoare $\gamma^k(t)$ sînt nenegative așa cum rezultă cu ușurință din formulele (II.2.104) și (II.2.105).

Fie p_k probabilitatea ca vectorul $t(\omega)$ să ia valori în regiunea de decizie T^k, deci

$$p_k = \mathbf{P}(T^k) ; \sum_{k=1}^{r} p_k = 1. \tag{II.2.106}$$

Dacă $g_k(z)$ este funcția densitate de probabilitate a variabilei aleatoare $\gamma^k(t)$, atunci funcția densitate de probabilitate $g_\gamma(z)$ a variabilei aleatoare $\gamma(t)$ definită de (II.2.102) este

$$g_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{r} p_k g_k(z) \tag{II.2.107}$$

deoarece $\gamma(t) = \gamma^k(t)$ cînd $t \in T^k$.

B. Bereanu [4] se ocupă de transformatele Laplace ale funcțiilor $g_\gamma(z)$ și $g_k(z)$ demonstrînd următoarele teoreme:

Teorema I. Dacă $g_k^*(s)$ este transformata Laplace a funcției densitate de probabilitate a variabilei aleatoare $\gamma_k(t)$, $k = 1, \ldots, r$ și $g_\gamma^*(s)$ este transformata Laplace a funcției densitate de probabilitate a variabilei $\gamma(t)$ atunci

$$g_\gamma^*(s) = \sum_{k=1}^{r} p_k\, g_k^*(s). \tag{II.2.108}$$

Relația (II.2.108) rezultă aplicînd egalității (II.2.107) transformarea Laplace.

Teorema II. Dacă t_j, $j = 1, \ldots, n$, sînt variabile aleatoare independente, nenegative și au funcțiile densitate de probabilitate $\varphi_j(z)$ și $c^i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, atunci

$$g_\gamma^*(s) = \sum_{k=1}^{r} p_k e^{-\gamma_0^k s} \prod_{j=1}^{n}{}' \varphi_j^*(\gamma^k s) \tag{II.2.109}$$

în care semnul „'" arată că $\varphi_j^*(\gamma_j^k s)$ se include în produs numai dacă $\gamma_j^k > 0$.

Demonstrație. Să considerăm variabilele aleatoare

$$\gamma_0^k + \gamma_1^k t_1 ;\ \gamma_2^k t_2 ;\ \gamma_3^k t_3 ;\ \ldots ;\ \gamma_n^k t_n. \tag{II.2.110}$$

Deoarece $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sînt variabile aleatoare independente, nenegative și γ_j^k, $j = 0, \ldots, n$ sînt constante nenegative, variabilele care formează șirul (II.2.110) sînt, de asemenea, independente și nenegative. Pentru a obține transformata Laplace $g_k^*(s)$ a funcției $g_k(z)$ se observă că

— funcția densitate de probabilitate a variabilei $\gamma_0^k + \gamma_1^k t_1$ este

$$(\gamma_1^k)^{-1}\, \varphi_1\, [(\gamma_1^k)^{-1}\, (z - \gamma_0^k)]$$

— funcția densitate de probabilitate a variabilei $\gamma_j^k t_j$, $j = 1, \ldots, n$ este

$$(\gamma_j^k)^{-1}\, \varphi_j\, [(\gamma_j^k)^{-1}\, z].$$

Din proprietățile transformării Laplace se deduce că

$$\mathcal{L}\, \{(\gamma_1^k)^{-1}\, \varphi_1\, [(\gamma_1^k)^{-1}\, (z - \gamma_0^k)]\, ;\, s\} = e^{-\gamma_0^k s}\, \varphi_1^*(\gamma_1^k s) \qquad \text{(II.2.111)}$$

$$\mathcal{L}\, \{(\gamma_1^k)^{-1}\, \varphi_1\, [(\gamma_1^k)^{-1}\, z]\, ;\, s\} = \varphi_1^*(\gamma_j^k s). \qquad \text{(II.2.112)}$$

Din (II.2.111), (II.2.112) și din proprietățile transformării Laplace pentru o convoluție se obține

$$g_k^*(s) = e^{-\gamma_0^k s} \prod_{j=1}^{n}{}' \varphi_j^*(\gamma_j^k s). \qquad \text{(II.2.113)}$$

Înlocuind expresia obținută pentru $g_k^*(s)$ în relația (II.2.108) se obține egalitatea din enunțul teoremei.

Dacă se notează cu $G_k(z)$ funcțiile de repartiție ale variabilei aleatoare $\gamma_k(z)$ atunci (II.2.79) se poate scrie

$$G(z) = \sum_{k=1}^{r} p_k G_k(z) \qquad \text{(II.2.114)}$$

unde $p_k = \mathbf{P}(T^k)$.

Din teorema II rezultă că transformata Laplace $G^*(s)$ a funcției $G(z)$ dată prin egalitatea (II.2.114) este

$$G^*(s) = \frac{1}{s}\left(\sum_{k=1}^{s} p_k\, e^{-\gamma_0^k s} \prod_{j=1}^{n}{}' \varphi_j^*(\gamma_j^k s)\right). \qquad \text{(II.2.115)}$$

În lucrarea citată relațiile (II.2.109) și (II.2.115) sînt folosite pentru determinarea efectivă a distribuției valorilor optimului problemei stochastice de transport (II.2.101) (II.2.102) în care densitatea de probabilitate $\varphi_j(z)$ a variabilei aleatoare $t_j(\omega)$ $j = 1, \ldots, n$ este

$$\varphi_j(z) = \begin{cases} \lambda_j e^{-\lambda_j z} & \text{dacă } z \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } z < 0 \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n \qquad \text{(II.2.116)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde λ_j sînt numere pozitive iar

$$\mathbf{P}\left\{t \mid \sum_{j=1}^{n} t_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\right\} \simeq 1. \tag{II.2.117}$$

Condiţiile teoremei II sînt îndeplinite, încît aplicînd formula (II.2.109) avem

$$\mathcal{L}\{\lambda_j e^{-\lambda_j z};\ s\} = \int_0^{+\infty} \lambda_j e^{-\lambda_j z} e^{-sz}\, dz = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s} \tag{II.2.118}$$

$$g_\gamma^*(s) = \sum_{k=1}^{r} p_k e^{-\gamma_0^k s} \prod_{j=1}^{n}{}' \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \gamma_j^k s}. \tag{II.2.119}$$

Folosind notaţia $\lambda_{kj} = \lambda_j(\gamma_j^k)^{-1}$ şi presupunînd că $\lambda_{kj} \neq \lambda_{kl}$ pentru toţi k dacă $j \neq l$, $g_\gamma^*(s)$ se mai poate scrie

$$g_\gamma^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{kj} e^{-\gamma_0^k s} \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{kj} + s} \tag{II.2.120}$$

unde

$$A_{kj} = p_k \prod_{l \neq j}{}' \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{kl} - \lambda_{kj}}.$$

Folosind proprietăţile transformării Laplace, se obţine

$$g_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} A_{kj} \Psi_{kj}(z) \tag{II.2.121}$$

unde

$$\Psi_{kj}(z) = \begin{cases} e^{-\lambda_{kj}(z-\gamma_0^k)} & \text{dacă } z \geqslant \gamma_0^k \\ 0 & \text{dacă } z < \gamma_0^k \end{cases}.$$

Se poate demonstra că

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{kj} = 1. \tag{II.2.122}$$

În adevăr, integrînd egalitatea (II.2.121) avem

$$G_\gamma(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(1 - B_{kj} e^{-\lambda_{kj} z}) \tag{II.2.123}$$

în care $B_{kj} = e^{-\gamma_0^k \lambda_{kj}}$. Deoarece $G(+\infty) = 1$, rezultă că egalitatea (II.2.122) este adevărată.

Ca aplicație reproducem exemplul numeric dat de B. Bereanu [4].

Exemplul VI. Datele unei probleme stochastice de transport sînt prezentate în tabelul 59.

(59)

3	4	5	2	0	11
2	3	5	4	0	13
6	5	2	3	0	8
$7+u$	10	5	$1+v$	$9-v-u$	

Variabilele din coloana a cincea reprezintă cereri fictive și satisfac ecuația a treia din sistemul (II.2.101). Funcțiile densitate de probabilitate ale variabilelor u și v sînt

$$\varphi_u(x) = 0{,}002e^{-0{,}002x}, \qquad \mathbf{P}(0 \leqslant u \leqslant 5) > 0{,}999$$

$$\varphi_v(y) = 0{,}003e^{-0{,}003y}, \qquad \mathbf{P}(0 \leqslant v \leqslant 3) > 0{,}999.$$

De aici rezultă că $\mathbf{P}(9 - u - v \geqslant 0) \simeq 1$

Soluția $x^1 = [x_{ij}^1]$ din tabelul 60 este optimă pentru $6 - u - v \geqslant 0$ deoarece toate celelalte variabile din bază sînt pozitive pentru orice u, v posibili.

Dacă $6 - u - v < 0$ se formează ciclul indicat în tabelul 60 și pentru $\theta = 6 - u - v$ se obține soluția optimă $x^2 = [x_{ij}^2]$ din tabelul 61.

Dreptunghiul bidimensional $T = \{u, v | 0 \leqslant u \leqslant 5,\ 0 \leqslant v \leqslant 3\}$ conține două regiuni de decizii și anume

$$T' = \{u, v | 6 - u - v \geqslant 0\} \text{ și } T^2 = \{u, v | 6 - u - v \leqslant 0\}.$$

Valorile funcției $\sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}$ pentru soluțiile x^1 și x^2 sînt

$$\gamma^1(u, v) = 60 + 3u + 2v \text{ și } \gamma^2(u, v) = 54 + 4u + 3v.$$

Scanned with OKEN Scanner

(60)

3	$4+u$ 4	5	$1+v$ $-\theta$ 2	$6-u-v$ $+\theta$ 0	11 u_i 0
$7+u$ 2	$6-u$ 3	5	4	0	13 1
6	5	5 2	$+\theta$ 3	3 $-\theta$ 0	8 0
$7+u$ v_j -3	10 -4	5 -2	$1+v$ -2	$9-u-v$ 0	

(61)

3	$4+u$ 4	5	$7-u$ 2	0	11
$7+u$ 2	$6-u$ 3	5	4	0	13
6	5	5 2	$u+v-6$ 3	$9-u-v$ 0	8
$7+u$	10	5	$1+v$	$9-u-v$	

Matricea optimelor $U = \{\gamma_j^k\}$ $k = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$ este

$$U = \begin{bmatrix} 60 & 54 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Probabilităţile $p_1 = \mathbf{P}(T^1)$ şi $p_2 = \mathbf{P}(T^2)$ sînt

$$p_1 = 6 \times 10^{-6} \int_{T^1} e^{-0,002x} e^{-0,003y} dxdy \simeq 0,9997$$

$$p_2 = 6 \times 10^{-6} \int_{T^2} e^{-0,002x} e^{-0,003y} dxdy \simeq 0,0003.$$

Scanned with OKEN Scanner

Numerele λ_{kj} şi A_{kj} sînt

$$\lambda_{11} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1^1} = \frac{0{,}002}{3} = 0{,}00067\,; \quad \lambda_{21} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1^2} = \frac{0{,}002}{4} = 0{,}0005$$

$$\lambda_{12} = \frac{\lambda_2}{\gamma_2^1} = \frac{0{,}003}{2} = 0{,}0015\,; \quad \lambda_{22} = \frac{\lambda_2}{\gamma_2^2} = \frac{0{,}003}{3} = 0{,}0010$$

$$A_{11} = p_1 \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} = 1{,}8066\,; \quad A_{21} = p_2 \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} = 0{,}0006$$

$$A_{12} = p_1 \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{11} - \lambda_{12}} = -\,0{,}8070\,; \quad A_{22} = p_2 \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}} = -\,0{,}0003.$$

Ca un control al calculelor se verifică $\sum_k \sum_j A_{kj} = 1$.

Aplicînd formula (II.2.102) se obţine funcţia densitate de probabilitate a variabilei aleatoare: costul minim al transporturilor.

Expresia acestei funcţii este

$$g_\gamma(z) = 12 \times 10^{-4}(\Psi_{11}(z) - \Psi_{12}(z)) + 3 \times 10^{-7}(\Psi_{21}(z) - \Psi_{22}(z))$$

unde

$$\Psi_{11} = \begin{cases} e^{-0{,}00067(z-60)}\,; & z \geqslant 60 \\ 0\,; & z < 60 \end{cases}$$

$$\Psi_{12} = \begin{cases} e^{-0{,}0015(z-60)}\,; & z \geqslant 60 \\ 0\,; & z < 60 \end{cases}$$

$$\Psi_{21} = \begin{cases} e^{-0{,}0005(z-54)}\,; & z \geqslant 54 \\ 0\,; & z < 54 \end{cases}$$

$$\Psi_{22} = \begin{cases} e^{-0{,}001(z-54)}\,; & z \geqslant 54 \\ 0\,; & z < 54. \end{cases}$$

Acest exemplu subliniază importanţa teoremelor I şi II pentru aplicaţiile practice.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

PROGRAMARE ÎN LANȚURI MARCOV

§ 1. LANȚURI MARCOV FINITE ȘI OMOGENE

Definiția 1. Fie $(E, \mathcal{K}, \mathbf{P}$ un cîmp de probabilitate și $X_i(\omega)$, $i \in N^*$ un șir de variabile aleatoare definite pe acest cîmp. Variabilele X_i, $i \in N^*$ trec prin mulțimea finită de stări $I = \{1, 2, \ldots m\}$.

Să notăm:

$$\mathbf{P}(X_n = j_n | X_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-2} = j_{n-2}, \ldots X_1 = j_1) = p_{j_1, j_2, \ldots j_{n-1}; j_n}, \quad \text{(III.1.1)}$$
$$j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in I.$$

Dacă, oricare ar fi $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in I$, avem

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}; j_n} = p_{j_{n-1} j_n} \quad \text{(III.1.2)}$$
$$j_{n-1}, j_n \in I,$$

șirul X_i, $i \in N^*$ formează, prin definiție, un lanț Marcov simplu.

Dacă, oricare ar fi $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k-1} \in I$, avem

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}; j_n} = p_{j_{n-k}, j_{n-k+1}, \ldots, j_{n-1}; j_n} \quad \text{(III.1.3)}$$
$$j_{n-k}, j_{n-k+1}, \ldots, j_n \in I$$

șirul X_i, $i \in N^*$ formează un lanț Marcov multiplu de ordinul k.

Dacă probabilitățile de trecere $p_{j_{n-1} j_n}$ nu depind de n lanțul este omogen. La fel, lanțul multiplu de ordinul k, este omogen dacă probabilitățile de trecere $p_{j_{n-k}, j_{n-k+1}, \ldots j_{n-1}; j_n}$ nu depind de n.

În cazul omogenității putem scrie:

$$\mathbf{P}(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = j_{n-2}, \ldots, X_1 = j_1) = p_{ij} \quad \text{(III.1.4)}$$
$$(j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}, j, i \in I)$$

oricare ar fi $j_1, j_2, \ldots j_{n-1} \in I$ și $n \in N^*$

$$\mathbf{P}(X_n = j | X_{n-1} = i_k, \ldots X_{n-k} = i_1, X_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \ldots X_1 = j_1) =$$
$$= p_{i_1 i_2 \ldots i_k j} \qquad (j_1, j_2, \ldots j_{n-k-1}, i_1, \ldots i_k, j \in I) \quad \text{(III.1.5)}$$

oricare ar fi $j_1, \ldots, j_{n-1} \in I$ și $n \in N^*$.

În mod evident trebuie să avem:

$$p_{ij} \geqslant 0; \qquad i, j \in I \tag{III.1.6}$$

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1; \quad \text{pentru oricare } i \in I. \tag{III.1.7}$$

În mod analog, pentru lanțul multiplu:

$$p_{i_1 i_2, \ldots i_k j} \geqslant 0; \quad i_1, i_2, \ldots i_k, j \in I \tag{III.1.8}$$

$$\sum_{j \in I} p_{i_1 i_2 \ldots i_k j} = 1, \text{ pentru oricare } i_1, i_2, \ldots i_k \in I. \tag{III.1.9}$$

Lanțul Marcov reprezintă cea mai simplă legătură de dependențe din teoria probabilităților. Se pot da numeroase exemple de asemenea lanțuri. Să considerăm un caracter transmisibil prin ereditate pentru indivizii aparținînd aceluiași sex. Dacă probabilitatea ca un individ să moștenească acest caracter depinde numai de faptul dacă părintele său a avut sau nu caracterul considerat, indiferent de situația celorlalți strămoși, avem de-a face cu un lanț Marcov simplu. Lanțul devine multiplu de ordinul k, dacă probabilitatea variază numai în raport cu situația a k strămoși luați în ordine directă.

Fie $A_1, A_2, \ldots A_m$ urne, conținînd bile de m culori, reprezentate respectiv prin numerele $1, 2, \ldots, m$. Efectuăm extracții succesive de bile din aceste urne după regula următoare: dacă bila extrasă din urna A_i este de culoarea j, extracția următoare va fi făcută din urna A_j. Șirul de variabile aleatoare reprezentînd extracțiile succesive din aceste urne este marcovian. Se vede imediat că el constituie un lanț simplu și omogen.

Un lanț Marcov simplu și omogen este definit prin probabilitățile

$$\mathbf{P}(X_1 = j) = p_j; \qquad j \in I \tag{III.1.10}$$

$$p_j \geqslant 0$$

$$\sum_{j \in I} p_j = 1$$

și prin probabilitățile de trecere (III.1.4) care formează matricea patrată

$$P = (p_{ij}), \qquad i, j \in I \tag{III.1.11}$$

Însemnăm prin p vectorul

$$p = (p_1, p_2, \ldots p_m).$$

Cunoașterea matricelor p și P determină un lanț Marcov, simplu și omogen, cu m stări.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, lanțul Marcov, multiplu și omogen este determinat prin probabilitățile de trecere (III.1.5) și prin probabilitățile referitoare la primele k variabile: $X_1, X_2, \ldots X_k$.

Stările considerate pînă acum aparțin mulțimii I. Ele pot aparține însă și produsului cartezian de mulțimi $\underbrace{I \times I \times \ldots \times I}_{k \text{ ori}}$. În acest din urmă caz, stările reprezintă puncte din R^k.

Fie X_n, $n \in N^*$, un lanț Marcov, omogen, multiplu de ordinul k, trecînd prin stările I.

Considerăm vectorul

$$Y_n = (X_{(n-1)k+1}, X_{(n-1)k+2}, \ldots, X_{nk}) \; n \in N^*. \qquad \text{(III.1.12)}$$

Deoarece variabilele care compun vectorul Y_n pot lua valorile I, rezultă că Y_n ia valorile $\underbrace{I \times I \times \ldots \times I}_{k \text{ ori}}$, adică punctele $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, $j_1, j_2, \ldots j_k \in I$ din spațiul R^k.

Să evaluăm probabilitatea

$$\mathbf{P}[Y_n = (j_1, j_2, \ldots, j_k)/Y_{n-1} = (i_1, i_2, \ldots i_k)]$$

Ținînd seamă de semnificația lui Y_n, probabilitatea de mai sus este egală cu

$$\mathbf{P}[X_{(n-1)k+1} = j_1, \ldots, X_{nk} = j_k/X_{(n-2)k+1} = i_1, \ldots X_{(n-1)k} = i_k] =$$

$$= p_{i_1 \ldots i_k j_1} \cdot p_{i_2 \ldots i_k j_1 j_2} \cdot \ldots p_{i_k j_1 \ldots j_{k-1} j_k} \qquad \text{(III.1.13)}$$

Se vede că valoarea acestei probabilități rămîne aceeași oricare ar fi stările anterioare prin care au trecut variabilele $Y_{n-2}, Y_{n-3}, \ldots Y_1$ și depinde numai de starea prin care a trecut Y_{n-1}. Variabilele Y_n, $n \in N^*$ formează prin urmare un lanț Marcov simplu și omogen.

Transformarea (III.1.12) ne conduce prin urmare de la lanțul X_n multiplu de ordinul k la lanțul simplu Y_n. Lanțurile multiple fiind astfel reductibile la lanțuri simple, nu ne vom ocupa în cele ce urmează decît de lanțuri simple.

Ergodicitatea lanțurilor Marcov

Am văzut că un lanț Marcov simplu și omogen este determinat prin matricele de probabilități p și P.

Să însemnăm

$$P_{n,i} = \mathbf{P}(X_n = i); \qquad i \in I$$

$$P_n = (P_{n,1}, P_{n,2}, \ldots P_{n,m})$$

Avem, prin definiţie:

$$P_{1,k} = p_k$$

şi deci

$$P_1 = p$$

$$P_{2,k} = \sum_{j_1 \in I} p_{j_1} p_{j_1 k}$$

Prin urmare

$$P_2 = pP$$

În general

$$P_{n,k} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in I} p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} k},$$

de unde rezultă

$$P_n = pP^{n-1}. \qquad \text{(III.1.14)}$$

Probabilităţile $P_{n,k}$ sînt prin urmare elementele matricei (III.1.14). Matricea P, care intervine în formula (III.1.14), poartă numele de matrice stochastică.

Definiţia 2. Matricea $P = (p_{ik})$ este *indecompozabilă*, dacă, fiind daţi doi indici oarecare $h \in I$, $l \in I$, putem găsi întotdeauna un şir de probabilităţi nenule, astfel ca,

$$p_{hk_1} \neq 0, \quad p_{k_1 k_2} \neq 0, \quad \ldots, \quad p_{k_{s-1} k_s} \neq 0, \quad p_{k_s l} \neq 0$$

Din definiţie rezultă

$$p_{hk_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_s l} \neq 0.$$

Prin urmare, dacă matricea este indecompozabilă, oricare ar fi stările $h \in I$, $l \in I$, este întotdeauna posibil ca lanţul să treacă în viitor de la starea $h \in I$ prin starea $l \in I$.

În cazul în care condiţia precedentă nu este verificată, matricea este *decompozabilă*. În acest caz o simplă permutare între linii şi coloane o aduce la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde cel puţin una dintre matricele B şi C este nulă. Dacă $B = O$, $C = O$, matricea stochastică este *total decompozabilă*. Dacă numai una dintre matricele B şi C este nulă, matricea P este *parţial decompozabilă*.

Continuînd descompunerea de mai sus, vom ajunge la forma generală

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O & O \\ O & A_2 & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_s & O \\ B_1 & B_2 & \dots & B_s & B_{s+1} \end{pmatrix} \qquad \text{(III.1.15)}$$

unde $A_1, A_2, \dots A_s$ sînt matrice indecompozabile, $B_1, B_2, \dots B_s$ matrice diferite de zero şi O este matricea nulă. Matricele patrate $A_1, A_2, \dots, A_s$ poartă numele de matrice finale, iar matricele dreptunghiulare $B_1, B_2, \dots, B_{s+1}$ matrice de trecere.

Sensul acestor denumiri rezultă lesne din considerarea unei matrice particulare:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 & 0 \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} & p_{57} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ p_{71} & p_{72} & p_{73} & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} \end{pmatrix}$$

Avem două matrice finale

$$A_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

şi trei matrice de trecere

$$B_1 = \begin{pmatrix} p_{51} & p_{52} \\ p_{61} & p_{62} \\ p_{71} & p_{72} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} p_{53} & p_{54} \\ p_{63} & p_{64} \\ p_{73} & p_{74} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} p_{55} & p_{56} & p_{57} \\ p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ p_{75} & p_{76} & p_{77} \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$\{1, 2\}$ și $\{3, 4\}$ sînt submulțimi ale lui $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pe care le numim *mulțimi finale*. Submulțimea $\{5, 6, 7\}$ o numim *mulțime de trecere*.

Să presupunem că X_n se găsește într-una din stările unei mulțimi finale. De exemplu, $X_n = 1$. Se vede că X_{n+1} nu poate lua decît una din valorile 1 sau 2, deoarece $p_{1h} = 0$, pentru $h = 3, 4, 5, 6, 7$. Dacă $X_{n+1} = 1$ sau $X_{n+1} = 2$, X_{n+2} poate lua numai una din valorile 1 și 2, deoarece avem și $p_{2h} = 0$, pentru $h = 3, 4, 5, 6, 7$. Prin urmare, dacă $X_n = 1$, celelalte variabile $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ nu pot lua decît valori ale mulțimii finale $\{1, 2\}$. Același lucru se întîmplă dacă $X_n = 2$. Tragem concluzia că, dacă la un moment dat lanțul intră într-o stare aparținînd unei mulțimi finale, el nu mai poate ieși din această mulțime.

Dacă $X_n = 5$, adică trece printr-o stare a unei mulțimi de trecere, X_{n+1} poate trece prin orice stare, însă, de îndată ce a intrat într-o stare aparținînd unei mulțimi finale, toate variabilele succesive vor lua valori numai din această mulțime.

Definiția 3. Dacă

$$\lim_{n \to \infty} P_{n,k} = P_k,$$

oricare ar fi vectorul p lanțul Marcov este ergodic.
Dacă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} P_{r,k} = P_k,$$

oricare ar fi vectorul p, lanțul este ergodic în medie.

Teorema I. Un lanț Marcov simplu și omogen, format dintr-o singură stare finală (fără mulțimi de trecere), este ergodic în medie.

Demonstrație. Din formula (III.1.14) reiese că trebuie să evaluăm matricea P^{n-1} unde P este matricea stochastică ale cărei elemente sînt probabilitățile de trecere.

Notăm prin P matricea (p_{ij}), $i, j \in I$, prin E matricea unitate cu m linii și m coloane, prin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ cele $s \leqslant m$ rădăcini distincte ale ecuației

$$|P - \lambda E| = 0 \qquad \text{(III.1.16)}$$

și cu $m_1, m_2, \ldots, m_s$ ordinele de multiplicitate respective ale acestor rădăcini:

$$|P - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea P^{n-1} în funcţie de elementele matricei P este dată de o formulă a lui O. Perron.

Însemnînd

$$P^{(n-1)} = (p_{ij}^{(n-1)}),$$

după formula lui Perron rezultă

$$p_{ij}^{(n-1)} = \sum_{h=1}^{s} \frac{1}{(m_h - 1)!} \mathbf{D}_{\lambda}^{m_h - 1} \left[\frac{\lambda^{n-1} P_{ji}(\lambda)}{\Psi_h(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_h} \qquad \text{(III.1.17)}$$

unde $\mathbf{D}_{\lambda}^{p}$ reprezintă derivata de ordinul p în raport cu λ şi

$$\Psi_h(\lambda) = \frac{|P - \lambda E|}{(\lambda - \lambda_h)^{m_h}},$$

iar $P_{ij}(\lambda)$ reprezintă minorul elementului din linia i şi coloana j a determinantului $|P - \lambda E|$.

Pentru folosirea formulei (III. 1.16) este esenţial să observăm că, în cazul unui lanţ format dintr-o singură mulţime finală, rădăcinile ecuaţiei (III.1.16) sînt mai mici sau egale în modul cu 1 şi că singurele rădăcini egale în modul cu 1 verifică ecuaţia binomă $\lambda^u = 1$ unde u este un număr întreg şi pozitiv.

Într-adevăr, dacă ecuaţia (III.1.16) este satisfăcută, există m valori, nu toate nule, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, astfel încît

$$\sum_{k \in I} p_{jk} x_k = \lambda x_j; \quad j \in I. \qquad \text{(III.1.18)}$$

Din (III.1.18) rezultă

$$\sum_{k \in I} p_{jk} |x_k| \geqslant |\lambda| \, |x_j|; \quad j \in I. \qquad \text{(III.1.19)}$$

Să admitem că $|x_j|$ este $\max_{k \in I} |x_k|$.

Deducem din inegalitatea de mai sus:

$$|\lambda| \leqslant \sum_{k \in I} p_{jk} \frac{|x_k|}{|x_j|} \leqslant \sum_{k \in I} p_{jk} \leqslant 1. \qquad \text{(III.1.20)}$$

Prin urmare, rădăcinile ecuaţiei $|P - \lambda E| = 0$ sînt mai mici în modul decît 1.

Pentru ca $|\lambda| = 1$, se vede din (III.1.20) că este necesar să avem:

$$|x_k| = |x_j|; \quad k, j \in I, \; p_{jk} > 0.$$

În plus, pentru ca inegalitatea (III.1.19) să devină o egalitate, trebuie ca toate variabilele x_k, făcînd parte din membrul întîi al

Scanned with OKEN Scanner

inegalității, să fie egale între ele, deoarece acestea în afară de faptul că au același modul trebuie să aibă și același argument.

Prin urmare, ecuațiile (III.1.18) se bucură, în acest caz, de proprietatea că toate valorile x_k existente în primul membru al unei ecuații sînt egale între ele.

Presupunînd $p_{j1} > 0$ să pornim de la prima ecuație

$$p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1m}x_m = \lambda x_1.$$

Dacă $p_{11} \neq 0$, înseamnă că

$$x_1 = x_j = \xi_1.$$

Ecuația de mai sus, devine

$$\xi_1 = \lambda\xi_1$$

și deci obținem rădăcina $\lambda = 1$.

Dacă $p_{11} = 0$, însemnînd prin ξ_1 valoarea comună a variabilelor x_h, pentru $p_{1h} \neq 0$ și prin $\xi_2 = x_1$, obținem

$$\xi_1 = \lambda\xi_2. \qquad \text{(III.1.21)}$$

Observăm că este esențial să avem $\xi_1 \neq \xi_2$, deoarece dacă $\xi_1 = \xi_2$, obținem $\lambda = 1$, caz pe care îl lăsăm deoparte.

Să considerăm ecuația

$$p_{h1}x_1 + p_{h2}x_2 + \ldots + p_{hm}x_m = \lambda x_h,$$

pentru care $p_{hh} = 0$ și $p_{h1} \neq 0$. Există întotdeauna un astfel de h, pentru că nu putem avea $p_{h1} = 0$, pentru orice $h \in I$.

Toate valorile x_j pentru care $p_{hj} \neq 0$ sînt egale cu ξ_2 și însemnînd prin ξ_3 valoarea x_h, rezultă:

$$\xi_2 = \lambda\xi_3, \qquad (\xi_2 \neq \xi_3)$$

Prelungind această analiză, obținem pînă la sfîrșit, ținînd seamă că stările lanțului formează o mulțime finală

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda\xi_2 \\ \xi_2 &= \lambda\xi_3 \\ &\vdots \\ \xi_u &= \lambda\xi_1. \end{aligned}$$

Prin înmulțirea acestor relații rezultă

$$\lambda^u = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, rădăcinile ecuației (III.1.16), egale în modul cu 1, sînt rădăcinile unei ecuații binome.

Mai trebuie să reținem din cele de mai sus că dacă $\lambda = 1$, toate valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt egale între ele. Din această observație, rezultă o proprietate a minorilor $P_{ij}(1)$.

Într-adevăr, dacă însemnăm

$$x_i = P_{i_0 j}(1), \quad i_0 \text{ fixat}$$

obținem

$$\sum_{j \in I} p_{ij} x_j = x_i; \qquad i \in I.$$

Valorile x_j verifică prin urmare sistemul (III.1.18) pentru $\lambda = 1$, și deci avem

$$P_{ij}(1) = P_j, \quad \text{pentru oricare} \quad i \in I.$$

În plus, dacă $D(\lambda) = |P - \lambda E|$

$$\left[\frac{D(\lambda)}{\lambda - 1}\right]_{\lambda=1} = D'(1) = \sum_{j \in I} P_{jj}(1) = \sum_{j \in I} P_j. \qquad \text{(III.1.22)}$$

Se mai poate arăta că, în ipotezele noastre, toate rădăcinile ecuației (III.1.16) care au modulul egal cu 1 sînt rădăcini simple.

Însemnînd prin $1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ rădăcinile ecuației $\lambda^u = 1$ care sînt și rădăcini ale ecuației (III.1.16) și prin μ_j, $j = t+1, \ldots, s$, celelalte rădăcini ale ecuației (III.1.16), mai mici în modul decît 1, rezultă din (III.1.17) că $p_{ij}^{(n)}$ este de forma

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{P_j}{\sum\limits_{k \in I} P_k} + \sum_{j=2}^{t} A_j \lambda_j^{n-1} + \sum_{j=t+1}^{s} \mu_j^{n-m_j} B_j(\mu_j). \qquad \text{(III.1.23)}$$

În formula (III.1.23), A_j reprezintă niște constante, iar $B_j(\mu_j)$ un polinom în μ_j de gradul $m_j - 1$, prin m_j notînd ordinul de multiplicitate al rădăcinii μ_j.

Să notăm

$$Q_n = \frac{E + P + P^2 + \ldots + P^{n-1}}{n}. \qquad \text{(III.1.24)}$$

Q_n este de asemenea o matrice pătrată cu m linii și m coloane

$$Q_n = (q_{ij}^{(n)}), \qquad i, j \in I$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seamă de faptul că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_j^r = 0, \quad \text{pentru } |\lambda_j| = 1,\ \lambda_j \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \mu_j^r = 0, \quad \text{pentru } |\mu_j| < 1,$$

deducem din (III.1.23) că

$$q_{ij}^{(n)} = \frac{P_j}{\sum\limits_{k\in I} P_k} + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{III.1.25}$$

Formula (III.1.25) ne arată că

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} P_{r,i} = \sum p_j \left(\frac{P_i}{\sum\limits_{k\in I} P_k} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{P_i}{\sum\limits_{j\in I} P_j} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Prin urmare

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} P_{r,i} = \frac{P_i}{\sum\limits_{j\in I} P_j}$$

oricare ar fi p.

Lanţul este prin urmare ergodic în medie.

Observaţie. Dacă singura rădăcină λ_j egală în modul cu 1 este $\lambda_j = 1$, termenul $\sum\limits_{j=2}^{t} A_j \lambda_j^{n-1}$ dispare din (III.1.23) şi în consecinţă

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,i} = \frac{P_i}{\sum\limits_{j\in I} P_j}$$

oricare ar fi p.

Demonstrăm astfel următoarea

T e o r e m ă : Un lanţ Marcov finit simplu şi omogen format dintr-o singură stare finală este ergodic dacă singura rădăcină în modul egală cu 1 a ecuaţiei $|P - \lambda E| = 0$ este $\lambda = 1$.

Lanţuri Marcov cu recompense

Teoria lanţurilor lui Marcov a căpătat în ultimele decenii o mare dezvoltare dominînd teoria proceselor stochastice. Programarea matematică a ajuns în mod natural la utilizarea proceselor stochastice

pentru rezolvarea problemelor întîlnite, în special, în programarea dinamică. Practica a sugerat noi tipuri de dependenţă, care au contribuit în ultimii ani la progresul teoriei proceselor marcoviene. Ne vom ocupa în cele ce urmează cu teoria lanţurilor Marcov cu recompense, pe care o vom aplica la programarea stochastică cu mai multe faze.

Cel dintîi care s-a ocupat de teoria lanţurilor cu recompense a fost Hirohisa Hatori [3]. Rezultatele stabilite de Hatori le vom regăsi printr-o altă metodă, folosind noţiunea de funcţie caracteristică.

Considerăm un lanţ Marcov, simplu şi omogen, X_n, $(n \in N^*)$ care trece prin mulţimea de stări $I = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Fie acum Y_n, $(n \in N^*)$ un alt şir de variabile aleatoare, care iau valorile a_{jk}, $j, k \in I$, ori de cîte ori lanţul X_n, $n \in N^*$ trece consecutiv prin stările j şi k. Y_n este de asemenea un lanţ Marcov simplu şi omogen. Într-adevăr avem

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Y_n = a_{jk} \mid Y_{n-1} = a_{ih}) = p_{jk}, \quad \text{dacă} \quad h = j \\ &\mathbf{P}(Y_n = a_{jk} \mid Y_{n-1} = a_{ih}) = 0, \quad \text{dacă} \quad h \neq j. \end{aligned} \tag{III.1.26}$$

Prin urmare, şirul Y_n, $n \in N^*$ constituie un lanţ Marcov, cu probabilităţile de trecere date de (III.1.26). Matricea probabilităţilor de trecere (III.1.26) are m^2 linii şi m^2 coloane. Studiul proprietăţilor lanţului Y_n, $n \in N^*$ cu ajutorul acestei matrice, din cauza numărului mare de elemente, este, în practica programării dinamice, mult mai dificil decît cu ajutorul matricei $P = (p_{ij})$ care are m linii şi m coloane.

Vom folosi de aceea matricea P pentru calculul mediei şi dispersiei variabilei

$$Y_{(n)} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \tag{III.1.27}$$

precum şi pentru studiul proprietăţilor asimptotice ale variabilei $Y_{(n)}$.

Fie θ o constantă a cărei valoare nu este determinată deocamdată. Notăm prin $P_k(n; \bigcap_{h,l \in I} \lambda_{hl})$ probabilitatea ca $Y_{(n)} - n\theta$ să ia valoarea

$$\sum_{h,l \in I} \lambda_{hl} a_{hl} - n\theta \tag{III.1.28}$$

unde λ_{hl} sînt numere întregi pozitive sau zero, astfel încît

$$\sum_{h,l \in I} \lambda_{hl} = n,$$

iar vectorul iniţial p este egal cu

$$p = \{p_{k1}, p_{k2}, \ldots p_{km}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceleași condiții, funcția caracteristică a variabilei (III.1.28) este

$$F_k(n\,;\,t,\,\theta) = \sum P_k(n\,;\,\bigcap_{h,l\in I}\lambda_{hl})e^{(\Sigma\lambda_{hl}a_{hl}-n\theta)it} \qquad \text{(III.1.29)}$$

Pe de altă parte

$$P_k(n\,;\,\bigcap_{h,l\in I}\lambda_{hl}) = \sum_{j\in I} p_{kj}P_j(n-1\,;\;(\lambda_{kj}-1)\bigcap_{\substack{h,l\in I\\ h\neq k,\ l\neq j}}\lambda_{hl}) \qquad \text{(III.1.30)}$$

Dacă utilizăm această relație în expresia funcției caracteristice, obținem relația fundamentală

$$F_k(n\,;\,t,\,\theta) = \sum_{j\in I} p_{kj}.e^{(a_{kj}-\theta)it}F_j(n-1\,;\,t,\,\theta). \qquad \text{(III.1.31)}$$

Să considerăm matricea

$$P(t,\,\theta) = (p_{jh}e^{(a_{jh}-\theta)it}), \qquad j,\,h\in I \qquad \text{(III.1.32)}$$

ale cărei elemente să le notăm pentru simplificare prin

$$q_{jh} = p_{jh}e^{(a_{jh}-\theta)it}, \qquad j,\,h\in I. \qquad \text{(III.1.33)}$$

Din (III.1.31) deducem

$$F_k(n\,;\,t,\,\theta) = \sum_{h\in I} q_{kh}^{(n-1)}F_h(1,\,t,\,\theta).$$

Însă

$$F_h(1,\,t,\,\theta) = \sum_{l\in I} p_{hl}e^{(a_{hl}-\theta)it} = \sum_{l\in I} q_{hl}.$$

Rezultă

$$F_k(n\,;\,t,\,\theta) = \sum_{h\in I} q_{kh}^{(n)}. \qquad \text{(III.1.34)}$$

Această egalitate ne arată că pentru determinarea funcției caracteristice este suficient să aplicăm formula lui Perron (III.1.17) la matricea $D(\lambda\,;\,t,\,\theta) = |P(t,\,\theta) - \lambda E|$.

Obținem astfel expresia căutată

$$F_k(n\,;\,t,\,\theta) = \sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(m_j-1)\,!}\mathbf{D}_{\lambda}^{m_j-1}\left[\frac{\lambda^n G_{hk}(\lambda;t)}{\Psi_j(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_j} \qquad \text{(III.1.35)}$$

în care notațiile sînt aceleași ca în (III.1.17) cu excepția lui G_{kh} care reprezintă minorul elementului din linia h și coloana k a determinantului $|D(\lambda\,;\,t\,;\,\theta)|$.

Scanned with OKEN Scanner

Rădăcinile ecuației caracteristice $D(\lambda\,;\,t\;\theta)$

$\lambda_g(t,\,\theta)$ fiind o rădăcină a ecuației

$$|D(\lambda,\,t,\,\theta)| = 0$$

vom demonstra că avem întotdeauna

$$|\lambda_g(t,\,\theta)| \leqslant 1.$$

Demonstrația este analogă celei date pentru stabilirea ergodicității (Teorema I).

Pentru orice rădăcină $\lambda_g(t,\,\theta)$ putem găsi întotdeauna m valori nu toate nule $z_1, z_2, \ldots, z_m$ pentru care

$$\sum_{h\in I} p_{jh} e^{(a_{jh}-\theta)it} z_h = \lambda_g(t,\,\theta) z_j. \qquad \text{(III.1.36)}$$

Rezultă

$$\sum_{h\in I} p_{hj}|z_h| \geqslant |\lambda_g(t,\,\theta)|\,|z_j|. \qquad \text{(III.1.37)}$$

Fie $|z_j|$ cel mai mare dintre modulele $|z_h|$, $h \in I$. Inegalitatea precedentă ne conduce la

$$|\lambda_g(t,\,\theta)| \leqslant \sum_{h\in I} p_{jh} \frac{|z_h|}{|z_j|} \leqslant \sum_{h\in I} p_{jh} = 1,$$

ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Putem merge și mai departe, examinînd cazul cînd rădăcinile ecuației $|D(\lambda,\,t,\,\theta)| = 0$ pot fi egale cu 1 în modul.

În acest caz, în locul relației (III.1.37) avem:

$$\sum_{h\in I} p_{jh}\,|z_h| = |z_j|$$

de unde rezultă

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_m|$$

Să notăm atunci

$$\lambda_g(t,\,\theta) = e^{i\varphi_g(t,\,\theta)}$$

$$z_h = \rho e^{i\omega_h(t,\,\theta)}\;; \qquad h \in I.$$

Cu aceste notații, deducem din (III.1.36)

$$\sum_{h\in I} p_{jh} e^{(a_{jh}-\theta)\,it}\, e^{i\omega_h(t,\,\theta)} = e^{i\varphi_g(t,\,\theta)}\, e^{i\omega_j(t,\,\theta)},\; j \in I$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă relaţiile în termeni reali:

$$\sum_{h\in I} p_{jh} \cos\left[(a_{jh} - \theta)t + \omega_k(t, \theta)\right] = \cos\left[\omega_j(t, \theta) + \varphi_g(t, \theta)\right]$$

$$\sum_{h\in I} p_{jh} \sin\left[(a_{jh} - \theta)t + \omega_h(t, \theta)\right] = \sin\left[\omega_j(t, \theta) + \varphi_g(t, \theta)\right].$$

Din aceste relaţii rezultă

$$\sum_{h\in I} p_{jh} \cos\left[(a_{jh} - \theta)\, t + \omega_h - \omega_j - \varphi_g\right] = 1 \qquad \text{(III.1.38)}$$

Deoarece

$$p_{jh} \geqslant 0, \quad \sum_{h\in I} p_{jh} = 1,$$

din relaţia (III.1.38) reiese că pentru toate valorile lui h pentru care $p_{jh} > 0$ trebuie să avem

$$(a_{jh} - \theta)t + \omega_h - \omega_j - \varphi_g = 2k_{jh}\pi \qquad \text{(III.1.39)}$$

k_{jh} fiind un întreg pozitiv sau negativ.

Să presupunem că avem

$$p_{h_1h_2}\, p_{h_2h_3} \ldots p_{h_sh_1} \neq 0.$$

Din (III.1.39) obţinem:

$$\begin{aligned}
(a_{h_1h_2} - \theta)\, t + \omega_{h_2} - \omega_{h_1} - \varphi_g &= 2k_{12}\pi \\
(a_{h_2h_3} - \theta)\, t + \omega_{h_3} - \omega_{h_2} - \varphi_g &= 2k_{23}\pi \\
&\vdots \\
(a_{h_sh_1} - \theta)\, t + \omega_{h_1} - \omega_{h_s} - \varphi_g &= 2k_{s1}\pi
\end{aligned}$$

de unde, prin adunare, rezultă

$$(a_{h_1h_2} + a_{h_2h_3} + \ldots + a_{h_sh_1} - s\theta)\, t - s\varphi_g = 2k'\pi$$

$$\varphi_g = \left(\frac{a_{h_1h_2} + a_{h_2h_3} + \ldots + a_{h_sh_1}}{s} - \theta\right) t + \frac{2k\pi}{s}. \qquad \text{(III.1.40)}$$

Pentru $t = 0$, avem $\varphi_g = \frac{2k\pi}{s}$, k şi s fiind întregi. Deci rădăcina $\lambda_g = e^{i\varphi_g}$, al cărui modul este egal cu unitatea, este o rădăcină a ecuaţiei binome $x^s - 1 = 0$, rezultat pe care l-am pus în evidenţă pentru lanţurile Marcov.

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea (III.1.40) este valabilă pentru fiecare din şirurile de valori de tipul precedent. Dacă $a_{j_1 j_2}, a_{j_2 j_3}, \ldots a_{j_\sigma j_1}$ este un al doilea şir, atunci:

$$\left(\frac{a_{h_1 h_2} + a_{h_2 h_3} + \ldots + a_{h_s h_1}}{s} - \theta\right) t + \frac{2k\pi}{s} = \left(\frac{a_{j_1 j_2} + a_{j_2 j_3} + \ldots + a_{j_\sigma j_1}}{\sigma} - \theta\right) t + \frac{2k^1\pi}{\sigma}$$

pentru orice t.
Prin urmare

$$\frac{a_{h_1 h_2} + a_{h_2 h_3} + \ldots + a_{h_s h_1}}{s} = \frac{a_{j_1 j_2} + a_{j_2 j_3} + \ldots + a_{j_\sigma j_1}}{\sigma} = \theta \quad \text{(III.1.41)}$$

Condiţiile (III.1.41) pentru orice sistem de forma $a_{h_1 h_2}, a_{h_2 h_3}, \ldots, a_{h_s h_1}$ sînt şi suficiente pentru ca

$$|\lambda_g(t, \theta)| = 1,$$

pentru orice t.

Fie

$$|D(\lambda; t; \theta)| = \lambda^m + B_1(t)\lambda^{m-1} + \ldots + B_m(t) \quad \text{(III.1.42)}$$

Deoarece $\lambda = 1$ este o rădăcină a ecuaţiei

$$|D(\lambda, 0, \theta)| = 0,$$

rezultă că

$$1 + B_1(0) + \ldots + B_m(0) = 0. \quad \text{(III.1.43)}$$

În baza relaţiei (III.1.33), coeficientul B_{m-s} al lui λ^s are forma

$$B_{m-s}(t) = \sum \pm q_{\alpha\alpha'} \cdot q_{\beta\beta'} \cdots q_{\mu\mu'},$$

unde $\alpha, \beta, \ldots \mu, \alpha', \beta', \ldots \mu'$ sînt întregi pozitivi, cuprinşi între 1 şi m, într-o ordine oarecare, numărul factorilor fiind $m - s$.

Să considerăm termenul corespunzător lui λ^s, format din primele s linii şi s coloane. Întregii $\alpha, \beta, \ldots \mu$ trebuie căutaţi printre valorile $s + 1, s + 2, \ldots, m$.

Să plecăm de la valoarea $q_{\alpha\alpha'}$, unde $\alpha' \neq \alpha$, şi să considerăm un produs de forma

$$q_{\alpha\alpha'} q_{\alpha'\alpha''} \cdots q_{\alpha(p)\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă

$$q_{\alpha\alpha'}q_{\alpha'\alpha''}\ldots q_{\alpha(p)_\alpha} = p_{\alpha\alpha'}p_{\alpha'\alpha''}\ldots p_{\alpha(p)_\alpha}e^{(a_{\alpha\alpha'}+\ldots+a_{\alpha(p)_\alpha}-p\theta)it}$$

$$q_{\alpha\alpha'}q_{\alpha'\alpha''}\ldots q_{\alpha(p)_\alpha} = p_{\alpha\alpha'}p_{\alpha'\alpha''}\ldots p_{\alpha(p)_\alpha},$$

în baza relaţiilor (III.1.41).

Ecuaţia $|D(\lambda; t; \theta)| = 0$ se reduce la ecuaţia $|D(\lambda; 0; \theta)| = 0$, care, după cum am văzut admite pe $\lambda = 1$ ca rădăcină egală în modul cu 1, iar celelalte rădăcini egale în modul cu 1 verifică o ecuaţie binomă.

Condiţiile (III.1.41) sînt deci necesare şi suficiente pentru ca ecuaţia considerată să admită rădăcini egale în modul cu 1, oricare ar fi t.

Valoarea medie a variabilei $Y_{(n)}$

Admitem că lanţul poate trece prin stări care formează o singură mulţime finală. După cum am văzut, în acest caz, rădăcinile egale în modul cu 1 sînt simple şi verifică o ecuaţie binomă

$$\lambda^u - 1 = 0.$$

Fie

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t,$$

aceste rădăcini.

Relaţia (III.1.35) poate fi scrisă atunci sub forma

$$F_k(n; t, \theta) = \frac{\lambda_1^n(t)}{\Psi_1(\lambda_1)}\sum_{h\in I}G_{hk}(\lambda_1) + \sum_{j=2}^{t}\sum_{h\in I}\frac{\lambda_j^n G_{hk}(\lambda_j; t)}{\Psi_j(\lambda_j)} + \quad \text{(III.1.44)}$$

$$+\sum_{j=t+1}^{s}\lambda_j^{n-m_j+1}P_j(\lambda_j)$$

unde $P_j(\lambda_j)$ este un polinom în j de gradul $m_j - 1$.

Notăm prin

$$M_k(n)$$

valoarea medie a lui $Y_{(n)}$ în ipoteza că $p = p_k = \{p_{k1}, \ldots, p_{km}\}$. Ştim că

$$i\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\theta) = \left[\frac{\partial F_k(n; t, \theta)}{\partial t}\right]_{t=0} \quad \text{(III.1.45)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd relaţia (III.1.44) în raport cu t, obţinem

$$\frac{\partial F_k(n\,;t\,;\theta)}{\partial t} = n\lambda_1^{n-1}(t)\lambda_1'(t)\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_1)}{\Psi_1(\lambda_1)} + \lambda_1^n(t)\left(\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_1)}{\Psi_1(\lambda_1)}\right)' +$$

$$+ n\sum_{j=2}^{t}\lambda_j^{n-1}\lambda_j'\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_j\,;t)}{\Psi_j(\lambda_j)} + \sum_{j=2}^{t}\lambda_j^n\left(\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_j\,;t)}{\Psi_j(\lambda_j)}\right)' + H(n,\,\theta) \qquad \text{(III.1.46)}$$

unde $H(n,\,\theta)$ este expresia ce se obţine prin derivarea ultimului termen din (III.1.44):

$$\sum_{j=t+1}^{s}\lambda_j^{n-m_j+1}P_j(\lambda_j)$$

Din cauză că $|\lambda_j| < 1$, $j = t+1, \ldots s$, rezultă că pentru $n \to \infty$, $H(n,\,\theta)$ tinde către zero. Însemnînd prin λ_r cea mai mare în modul dintre rădăcinile λ_j, $j = t+1, \ldots, s$, avem prin urmare:

$$H(n,\,\theta) = 0(\lambda_r^n). \qquad \text{(III.1.47)}$$

Putem deci scrie asimptotic, pentru $t = 0$:

$$\frac{\partial F_k(n\,;0,\,\theta)}{\partial t} = n\lambda_1'(0)\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(1)}{\Psi_1(1)} + n\sum_{t=2}^{s}\lambda_j'(0)\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_j(0)\,;\theta)}{\Psi_j(\lambda_j(0))}\lambda_j^{n-1}(0) +$$

$$+ a_k + \sum B_j\lambda_j^n(0) + 0(\lambda_r^n). \qquad \text{(III.1.48)}$$

unde am notat

$$\left(\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_1)}{\Psi_1(\lambda_1)}\right)'_{t=0} = a_k$$

$$\left[\sum_{h\in I}\frac{G_{hk}(\lambda_j\,;t)}{\Psi_j(\lambda_j)}\right]'_{t=0} = B_j.$$

Pentru a calcula valoarea expresiilor

$$\sum_{h\in I}\frac{G_{hj}(\lambda_j(0))}{\Psi_j(\lambda_j(0))}, \qquad j = 1, \ldots, t$$

adunăm la coloana j a determinantului $|D(\lambda\,;0\,;\theta)|$ pe toate celelalte şi apoi dezvoltăm determinantul după elementele acestei coloane. Obţinem

$$|D(\lambda_j\,;t\,;\theta)| = (\lambda_j - 1)\sum_{h\in I}G_{hk}(\lambda_j(t)), \qquad t = 0. \qquad \text{(III.1.49)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\lambda_j(0) \neq 1$ este o rădăcină a ecuației $|D(\lambda\,;\,0\,;\,\theta)| = 0$ din egalitatea precedentă deducem

$$\sum_{h\in I} G_{hk}(\lambda_j(0)) = 0.$$

Dacă ținem seamă și de faptul că

$$\Psi_j(\lambda_j(0)) = \left[\frac{\partial|D(\lambda,\,0,\,\theta)|}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_j(0)} \neq 0,$$

deoarece $\lambda_j(0)$ este o rădăcină simplă a ecuației $|D(\lambda\,;\,0,\,\theta)| = 0$ deducem că $B_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, t$.

Avem, prin urmare,

$$\sum_{h\in I} \frac{G_{hj}(\lambda_j(0))}{\Psi_j(\lambda_j(0))} = 0\,; \quad j = 2, \ldots, t. \tag{III.1.50}$$

Pentru $\lambda_1(0) = 1$, din (III.1.49) rezultă

$$\sum_{h\in I} G_{hk}(1) = \left[\frac{\partial|D(\lambda\,;\,0,\,\theta)|}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1(0)}.$$

Pe de altă parte

$$\Psi_1(\lambda) = \left[\frac{\partial|D(\lambda\,;\,0,\,\theta)|}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1(0)}$$

de unde deducem

$$\sum_{h\in I} \frac{G_{hk}(1)}{\Psi_1(1)} = 1. \tag{III.1.51}$$

Din (III.1.45) și (III.1.46), ținînd seamă de egalitățile stabilite mai sus obținem

$$i\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\theta) = n\lambda_1'(0) + a_k + \sum_{j=2}^{t} B_j\lambda_j^n(0) + 0(\lambda_r^n) \tag{III.1.52}$$

Pentru a calcula pe $\lambda'_1\,(0)$, derivăm relația

$$|p_{ij}\, e^{(a_{ij}-\theta)ti} - \varepsilon_{ij}\lambda_{ij}| = 0,$$

$$\varepsilon_{ij} = 0, \text{ pentru } i \neq j$$

$$\varepsilon_{ij} = 1, \text{ pentru } i = j$$

Scanned with OKEN Scanner

şi facem $t = 0$, ţinînd seamă de (III.1.22). Rezultă

$$\lambda_1'(0) = \frac{\sum\limits_{i,j \in I} P_i p_{ij}(a_{ij} - \theta)}{\sum\limits_{i \in I} P_i} i \qquad \text{(III.1.53)}$$

Prin urmare:

$$\mathbf{E}_k(Y_{(n)}) = \left(\frac{\sum\limits_{i,j \in I} P_i p_{ij} a_{ij}}{\sum\limits_{i \in I} P_i} - \theta \right) n + a_k + \sum_{j=2}^{t} B_j \lambda_j^n(0) + 0(\lambda_r^n) \qquad \text{(III.1.54)}$$

Să însemnăm:

$$\sum_{j \in I} p_{ij} a_{ij} = \theta_i. \qquad \text{(III.1.55)}$$

Se vede că pentru coeficientul lui n din (III.1.54) obţinem expresia $\bar{\theta} - \theta$, unde

$$\bar{\theta} = \frac{\sum\limits_{i \in I} P_i \theta_i}{\sum\limits_{i \in I} P_i}. \qquad \text{(III.1.56)}$$

O funcţie de forma

$$\sum_{j=1}^{t} \alpha_j \mu_j^n + \varphi(n)$$

în care μ_j, $j = 1, 2, \ldots, t$ sînt rădăcinile ecuaţiei binome

$$\lambda^t = 1$$

t întreg şi pozitiv, iar

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = 0,$$

poartă numele de *funcţie asimptotic periodică.*

Dacă alegem acum $\theta = \bar{\theta}$ atunci putem afirma că $\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\theta)$ este o funcţie asimptotic periodică. Dacă luăm însă $\theta = 0$, în baza formulei (III.1.54) vom avea

$$M_k(n) = \bar{\theta} n + \varphi_k(n), \qquad \text{(III.1.57)}$$

unde $\varphi_k(n)$ este o funcţie asimptotic periodică.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd singura rădăcină egală în modul cu 1 este λ_1 deducem din (III.1.54)

$$M_k(n) = \bar{\theta}n + a_k + 0(\lambda_r^n), \tag{III.1.58}$$

unde după cum se vede $\bar{\theta}$ nu depinde de k. Acest rezultat prezintă interes în anumite probleme de programare dinamică.

Momentul de ordinul al doilea al lui $Y_{(n)} - n\bar{\theta}$

Derivînd de două ori în raport cu t relaţia (III.1.44) şi efectuînd calcule similare cu cele care s-au făcut pentru determinarea valorii medii a variabilei $Y_{(n)}$, obţinem:

$$\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\bar{\theta})^2 = -\lambda_1''(0, \bar{\theta})n + c + \sum_{j=2}^{n}\lambda_j^n(0)D_j + 0(\lambda_r^n) \tag{III.1.59}$$

$$\lambda_1''(0, \bar{\theta}) = -\frac{\sum\limits_{i,j} P_i p_{ij}(a_{ij} - \bar{\theta})^2 + \sum\limits_{i,j,h,l \in I} P_i P_j p_{ih} p_{jl}(a_{ih} - \bar{\theta})(a_{jl} - \bar{\theta})}{\sum\limits_{i \in I} P_i} \tag{III.1.60}$$

Avem întotdeauna

$$\lambda_1''(0, \bar{\theta}) \neq 0.$$

Numai în cazul particular cînd sînt îndeplinite egalităţile (III.1.41) avem $\lambda''_1(0, \bar{\theta}) = 0$.

Trebuie să reţinem faptul important că momentul de ordinul al doilea al variabilei $Y_{(n)} - n\bar{\theta}$ este asimptotic de ordinul lui n plus o funcţie asimptotic periodică.

Teorema limită centrală pentru $Y_{(n)}$

Sîntem acum în măsură să demonstrăm:

Teorema II. Dacă lanţul Y_n, $n \in N^*$ *este format dintr-o singură mulţime finală, variabila* $Y_{(n)}$, *convenabil normată, este normală.*

Pentru demonstraţie să ţinem seamă de faptul că:

$$\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\bar{\theta}) = \varphi_k(n) \tag{III.1.61}$$

$$\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\bar{\theta})^2 = -\lambda''_1(0, \bar{\theta})n + \Phi_k(n), \tag{III.1.62}$$

unde $\varphi_k(n)$, $\Phi_k(n)$ sînt două funcţii asimptotice periodice de n.

Indicele k arată că vectorul iniţial p este egal cu $p_k = \{p_{k1}, p_{k2}, \ldots p_{km}\}$.

Să considerăm variabila

$$Z_{(n)} = \frac{Y_{(n)} - n\bar{\theta}}{\sqrt{\mathbf{E}_k(Y_{(n)} - n\bar{\theta})^2}} = \frac{Y_{(n)} - n\bar{\theta}}{\sqrt{-n\lambda_1'' + \Phi_k(n)}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia caracteristică a variabilei $Z_{(n)}$ pentru $n \to \infty$ se va obţine din $F_k(n; t, \bar{\theta})$, după ce facem substituţia

$$t = \frac{u}{\sqrt{-\lambda_1'' n}},$$

şi facem pe $n \to \infty$.

Ţinînd seamă de (III.1.44), (III.1.50), (III.1.51), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} F_k\left(n;\ \frac{n}{\sqrt{-\lambda_1''}};\ \bar{\theta}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1^n \left[\frac{u}{\sqrt{-\lambda_1'' n}},\ \bar{\theta}\right] =$$

$$= \lim \left[1 - \frac{u^2}{2n} + 0(n^{-3/2})\right]^n = e^{-u^2/2}$$

convergenţa fiind uniformă.

Funcţia caracteristică a variabilei $Z_{(n)}$ converge uniform, pentru $n \to \infty$, către funcţia caracteristică a legii normale şi prin urmare teorema este demonstrată.

§ 2. PROGRAMARE DINAMICĂ CU SUCCESIUNE MARCOVIANĂ

Consideraţii generale

Programarea de care ne-am ocupat pînă acum se referea la un singur stadiu, în sensul că trebuia să găsim soluţia optimă într-o problemă de programare pentru un proces care se termina într-o singură etapă. Ca exemplu să considerăm programarea liniară referitoare la obţinerea optimului valoric al recoltei pentru un teren de suprafaţă dată şi cu anumite condiţii restrictive: număr maxim de ore de lucru, suma limitată pentru cheltuieli etc. Optimul se obţine prin determinarea porţiunilor din suprafaţă care trebuie să fie însămînţate cu o anumită plantă. Această problemă de programare poate avea un caracter deterministic sau un caracter stochastic. Dacă presupunem că recolta la hectar este cunoscută pentru fiecare plantă şi că preţurile de vînzare sînt, de asemenea, de mai înainte cunoscute, avem de-a face cu o programare liniară deterministică. Dacă ne propunem să rezolvăm problema în ipoteza că şi producţia şi preţurile de vînzare variază după legi de probabilitate date, sîntem în cazul

Scanned with OKEN Scanner

unei programări stochastice. Şi într-un caz şi într-altul programarea se referă la recolta dintr-un singur an şi avem de luat o singură decizie.

Să considerăm că ne interesează însă valoarea optimă a recoltei pe mai mulţi ani. Ne propunem, de exemplu, în problema enunţată, să găsim valoarea optimă a producţiei în timp de cinci ani. Avem atunci o programare cu mai multe stadii sau cu mai multe etape. Stadiul, în acest caz, este anul. În alte probleme stadiul poate fi dat în luni, ore etc., reprezentînd timpul în care se face o experienţă şi după care trebuie luată o decizie. Programarea cu mai multe stadii poartă numele de *programare dinamică*.

Dacă recolta dintr-un an nu depinde de recolta din anul precedent problema se simplifică deoarece, pentru obţinerea maximului căutat, va trebui să rezolvăm cinci probleme identice de programare liniară şi să însumăm rezultatele. Dacă însă plantaţia însămînţată într-un an influenţează recolta din anul viitor după o anumită lege de dependenţă avem de rezolvat o problemă de programare dinamică stochastică. În acest paragraf ne vom ocupa de programările dinamice cu caracter stochastic pentru care dependenţa elementelor de la un stadiu la altul este marcoviană.

O problemă de programare dinamică cu succesiune marcoviană

Să presupunem că o maşină poate lucra în trei faze: I, II, III. În faza II maşina are cea mai mare productivitate pe oră, în faza I o productivitate pe oră mai redusă, iar în faza III cea mai mică productivitate (fiind necesară, de exemplu, o reparaţie a maşinii). Pentru fiecare din fazele I şi II, conducătorul maşinii are la dispoziţie cîte două alternative, şi anume, alternativele I_1 şi I_2 pentru faza I şi alternativele II_1 şi II_2 pentru faza II. Dacă la începutul unei ore a fost aleasă alternativa I_1 maşina poate trece pînă la sfîrşitul etapei de o oră în stările I, II, III cu probabilităţile respective

$$p_{11}^1,\ p_{12}^1,\ p_{13}^1.$$

Probabilităţile ca maşina să treacă în decursul unei etape prin două sau mai multe faze sînt neglijabile, astfel încît avem

$$p_{11}^1 + p_{12}^1 + p_{13}^1 = 1.$$

Din alternativa I_2 existentă la începutul unei etape, maşina poate trece pînă la sfîrşitul etapei în fazele I, II, III respectiv cu probabilităţile

$$p_{11}^2,\quad p_{12}^2,\quad p_{13}^2$$
$$p_{11}^2 + p_{12}^2 + p_{13}^2 = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

La fel, introducem probabilităţile

$$p_{21}^1,\ p_{22}^1,\ p_{23}^1, \qquad p_{21}^1 + p_{22}^1 + p_{23}^1 = 1,$$

$$p_{21}^2,\ p_{22}^2,\ p_{23}^2, \qquad p_{21}^2 + p_{22}^2 + p_{23}^2 = 1,$$

care reprezintă respectiv probabilităţile de a trece într-o etapă de la alternativele II_1, II_2 la stările I, II, III.

În sfîrşit, pentru faza III avem o singură alternativă pentru care notăm probabilităţile de trecere prin

$$p_{31},\ p_{32},\ p_{33}, \qquad p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1.$$

Productivitatea maşinii variază evident în raport cu aceste treceri. Notăm prin a_{jk}^l productivitatea în lei în cazul cînd maşina trece în cursul etapei de la alternativa J_l, J = I, II, III; $l = 1, 2$, la faza k, k = I, II, III. De exemplu, a_{12}^2 reprezintă productivitatea orară în cazul cînd în timpul etapei se trece de la alternativa I_2 la faza II. În cazul nostru probabilităţile de mai sus şi productivităţile a_{jk}^l sînt date în tabelul 62.

(62)

	PROBABILITĂŢI			PRODUCTIVITĂŢI		
	I	II	III	I	II	III
I_1	0,25	0,47	0,28	124 lei	72 lei	— 90 lei
I_2	0,35	0,55	0,10	123 „	70 „	—300 „
II_1	0,33	0,55	0,12	350 „	250 „	—160 „
II_2	0,37	0,59	0,04	300 „	223 „	—320 „
III	0,39	0,60	0,01	93 „	51 „	—300 „

Se vede că trecerile în faza III se soldează cu pierderi din cauză că se produc cheltuieli de reparaţie (salarii, materiale etc.) şi maşina nu produce în tot timpul etapei. În legătură cu funcţionarea acestor maşini se pot pune mai multe probleme. Ne vom ocupa de două dintre ele, care prezintă din punct de vedere practic un interes mai mare. Să notăm prin $a_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, productivitatea maximă a maşinii în n etape ştiind că la începutul activităţii maşina se găseşte respectiv în fazele I, II, III. Dat fiind faptul că avem de a face cu un proces aleator, productivitatea maşinii în n etape este o variabilă aleatoare. Fie $\xi_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ această variabilă aleatoare. Ştiind

Scanned with OKEN Scanner

că la începutul activității mașina se găsește respectiv în fazele I, II, III, avem

$$a_i(n) = \text{Max } \mathbf{E}(\xi_i(n)), \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{(III.2.1)}$$

unde $\mathbf{E}(\xi_i(n))$, $i = 1, 2, 3$ reprezintă valoarea medie a variabilei $\xi_i(n)$ iar maximul este luat față de toate alternativele ce se pot alege în cele n etape.

Prima problemă constă în determinarea lui $a_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ pentru o valoare finită a numărului n de etape, de exemplu $n = 8$. Aceasta înseamnă să alegem astfel alternativele în cele opt etape de lucru astfel încît valoarea medie a productivității să fie maximă.

A doua problemă se referă la găsirea valorii maxime $a_i(n)$, $i = 1,2,3$, pentru o lungă perioadă de timp, nedeterminată. Vom nota această valoare prin $a_i(\infty)$, $i = 1, 2, 3$.

Politica alternativelor

În exemplul considerat, la începutul activității putem să ne găsim în una din fazele I, II, III. Să admitem că mașina se găsește în faza II. Rămînînd în aceeași fază, conducătorul poate alege prin fixarea unor dispozitive una din alternativele II_1, II_2. Evident el va alege cea mai avantajoasă dintre ele pentru scopul urmărit.

La începutul etapei a doua, nu putem ști în ce fază va fi mașina. Știm însă, cu probabilități cunoscute, că se va găsi într-una din fazele I, II, III. Dacă se va găsi în faza I, va putea fi aleasă una din cele două alternative I_1, I_2, dacă va fi în faza II va putea fi aleasă una din alternativele II_1, II_2, iar în faza III nu se mai prezintă posibilitatea unei alegeri, deoarece există o singură alternativă. Deci la etapa a doua va fi cu putință alegerea următoarelor alternative:

Cazul I

	ALTERNATIVELE I_1, II_1, III					
	PROBABILITĂȚI			PRODUCTIVITATE		
	I	II	III	I	II	III
I_1	0,25	0,47	0,28	124 lei	72 lei	— 90 lei
II_1	0,33	0,55	0,12	350 „	250 „	—160 „
III	0,39	0,60	0,01	93 „	51 „	—300 „

Scanned with OKEN Scanner

Cazul II (64)

	ALTERNATIVELE I_1, II_2, III					
	PROBABILITĂȚI			PRODUCTIVITATE		
	I	II	III	I	II	III
I_1	0,25	0,47	0,28	124 lei	72 lei	— 90 lei
II_2	0,37	0,59	0,04	300 „	223 „	—320 „
III	0,39	0,60	0,01	93 „	51 „	—300 „

Cazul III (65)

	ALTERNATIVELE I_2, II_1, III					
	PROBABILITĂȚI			PRODUCTIVITATE		
	I	II	III	I	II	III
I_2	0,35	0,55	0,10	123 lei	70 lei	—300 lei
II_1	0,33	0,55	0,12	350 „	250 „	—160 „
III	0,39	0,60	0,01	93 „	51 „	—300 „

Cazul IV (66)

	ALTERNATIVELE I_2, II_2, III					
	PROBABILITĂȚI			PRODUCTIVITATE		
	I	II	III	I	II	III
I_2	0,35	0,55	0,10	123 lei	70 lei	—300 lei
II_2	0,37	0,59	0,04	300 „	223 „	—320 „
III	0,39	0,60	0,01	93 „	51 „	—300 „

Alegerea unuia dintre aceste cazuri înseamnă alegerea unei politici de alternative. Evident că în calcule va trebui să considerăm în etapa a doua politica cea mai avantajoasă pentru scopul pe care-l urmărim.

Pentru etapa a treia și cele se urmează va trebui aplicat același procedeu, alegînd în calcule, de fiecare dată, politica de alternative cea mai avantajoasă.

Este de observat că fiecare politică reprezintă aplicarea unuia din cele patru lanțuri Marcov, definite în cazurile I, II, III, IV.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul general, într-o astfel de programare avem un număr de m faze: $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, ..., $I^{(m)}$. Pentru fiecare fază $I^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots m$ avem j_k alternative, j_k fiind un număr întreg, pozitiv

$$I_1^{(k)}, \quad I_2^{(k)}, \quad \ldots, \quad I_{j_k}^{(k)}.$$

Alegerea unei politici de alternative, la o anumită etapă, înseamnă alegerea unui grup de m alternative

$$I_{h_1}^{(1)}, \quad I_{h_2}^{(2)}, \quad \ldots, \quad I_{h_m}^{(m)},$$

unde $h_1, h_2, \ldots, h_m$ sînt numere întregi pozitive, astfel încît $h_i \leqslant j_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Pentru fiecare etapă avem $j_1, j_2, \ldots, j_m$ politici, adică un număr în general mare. De exemplu pentru 20 faze, cu cîte trei alternative fiecare, avem 3^{20} politici. Să mai observăm că alegerea politicii optime dintre 3^{20} politici trebuie făcută la fiecare etapă. Să începem de aceea găsirea unor metode de simplificare a calculelor.

Maximizarea productivității unui număr finit de etape

Metoda iterațiilor

Fie $\xi_{i,l}^{(1)}(n)$ productivitatea mașinii în n etape, pornind de la etapa întîi, în ipoteza că mașina pornește din faza i cu alternativa l.

Notăm

$$M_{i,l}^{(1)}(n) = \mathbf{E}(\xi_{i,l}^{(1)}(n)) \tag{III.2.2}$$

Avem relația

$$M_{i,l}^{(1)}(n) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{l} a_{ij}^{l} + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{l} M_{j,k}^{(2)}(n-1) \tag{III.2.3}$$

notînd prin k alternativa pe care ne-am ales-o la apariția fazei j și prin $M_{j,k}^{(2)}(n-1)$ valoarea medie mai sus definită, în ipoteza că plecăm de la etapa a doua.

Pe noi ne interesează valoarea expresiei

$$a_i^{(1)}(n) = \operatorname*{Max}_{l} M_{i,l}^{(1)}(n) \tag{III.2.4}$$

Maximul din formula de mai sus fiind luat nu numai în raport cu alternativele L ale fazei i, ci și în raport cu toate politicile alternativelor care urmează după etapa întîi.*

---

* Formulele (III.2.1) și (III.2.4) sînt identice. S-a folosit indicele superior în expresia $a_i^{(1)}(n)$ pentru a marca prima etapă.

Din formula (III.2.3) deducem

$$a_i^{(1)}(n) = \operatorname{Max}_l \left[\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_{ij}^l + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l M_{j,k}^{(2)}(n-1) \right]. \qquad \text{(III.2.5)}$$

Analog cu formula (III.2.4) avem

$$a_j^{(2)}(n-1) = \operatorname{Max}_k M_{j,k}^{(2)}(n-1) \qquad \text{(III.2.6)}$$

maximul fiind luat în raport cu toate alternativele K ale fazei j și cu toate politicile alternativelor, pornind de la etapa a doua, în următoarele $(n-1)$ etape.

Din (III.2.6) rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_{ij}^l + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l M_{j,k}^{(2)}(n-1) \leqslant \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_j^{(2)}$$

Prin urmare

$$a_i^{(1)}(n) = \operatorname{Max}_l \left[\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_{ij}^l + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_{ij}^{(2)}(n-1) \right]. \qquad \text{(III.2.7)}$$

În mod analog, stabilim relația

$$a_h^{(r)}(n-r) = \operatorname{Max}_l \left[\sum_{k=1}^{m} p_{hk}^l a_{hk}^l + \sum_{k=1}^{m} p_{hk}^l a_k^{(r+1)}(n-r-1) \right] \qquad \text{(III.2.8)}$$

unde $a_h^{(r)}(n-r)$ înseamnă maximul productivității în ipoteza că la etapa $r < n$ mașina se găsește în faza h și că mai sînt $n-r$ etape de parcurs.

Formula (III.2.8) ne permite să determinăm maximul căutat prin recurență.

Aplicînd această relație, avem

$$a_k^{(n-1)}(1) = \operatorname{Max}_l \sum_{j=1}^{m} p_{kj}^l a_{kj}^l. \qquad \text{(III.2.9)}$$

După ce cunoaștem pe $a_h^{(n-1)}(1)$, determinăm $a_h^{(n-2)}(2)$, cu ajutorul relației

$$a_h^{(n-2)}(2) = \operatorname{Max}_l \left[\sum_{k=1}^{m} p_{hk}^l a_{hk}^l + \sum_{k=1}^{m} p_{hk}^l a_k^{(n-1)}(1) \right] \qquad \text{(III.2.10)}$$

și așa mai departe, aplicînd consecutiv relația (III.2.8) ajungem la valoarea lui $a_i^{(1)}(n)$.

Acest procedeu de calcul al valorii maxime căutate poartă numele de *metoda iteraţiilor*.

Vom aplica metoda iteraţiilor pentru exemplul numeric expus. Aplicînd întîi formula (III.2.9) avem:

$$\sum_{j=1}^{3} p_{1j}^{1} a_{1j}^{1} = 0{,}25 \times 124 + 0{,}47 \times 72 + 0{,}28 \times (-90) = 39{,}64$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_{1j}^{2} a_{1j}^{2} = 0{,}35 \times 123 + 0{,}55 \times 70 + 0{,}10 \times (-300) = 51{,}55$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{1} a_{2j}^{1} = 0{,}33 \times 350 + 0{,}55 \times 250 + 0{,}12 \times (-160) = 233{,}80 \qquad \text{(III.2.11)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{2} a_{2j}^{2} = 0{,}37 \times 300 + 0{,}59 \times 223 + 0{,}04 \times (-320) = 229{,}77$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_{3j} a_{3j} = 0{,}39 \times 93 + 0{,}60 \times 51 + 0{,}01 \times (-300) = 63{,}87$$

Pentru faza I avem de ales, conform formulei (III.2.9), valoarea cea mai mare corespunzătoare celor două alternative.

Rezultă astfel $a_1^{(8)}(1) = 51{,}55 > 39{,}64$.

Obţinem în mod analog

$$a_2^{(8)}(1) = 233{,}80, \quad a_3^{(8)}(1) = 63{,}87.$$

După cum se vede, pentru prima fază am ales alternativa I_2, pentru faza II alternativa II_1, iar pentru faza III alternativa III.

Am ales astfel politica I_2, II_1, III sau, mai pe scurt, politica P_{211}.

Trecem acum la determinarea lui $a_k^{(7)}(2)$. Membrul drept al formulei (III.2.10), întrucît am stabilit valorile $a_k^{(8)}(1)$, capătă în raport cu toate alternativele următoarele valori:

$$\sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{1} a_{1k}^{1} + \sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{1} a_k^{(8)}(1) = 39{,}64 + 0{,}25 \times 51{,}55 +$$

$$+ 0{,}47 \times 233{,}80 + 0{,}28 \times 63{,}87 = 180{,}30$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{2} a_{1k}^{2} + \sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{2} a_k^{(8)}(1) = 51{,}55 + 0{,}35 \times 51{,}55 +$$

$$+ 0{,}55 \times 233{,}80 + 0{,}10 \times 63{,}87 = 204{,}57$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{3} p_{2k}^{1} a_{2k}^{2} + \sum_{k=1}^{3} p_{2k}^{1} a_{k}^{(8)}(1) = 233{,}80 + 0{,}33 \times 51{,}55 + \quad \text{(III.2.12)}$$

$$+ 0{,}55 \times 233{,}8 + 0{,}12 \times 63{,}87 = 387{,}06.$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_{2k}^{2} a_{2k}^{2} + \sum_{k=1}^{3} p_{2k}^{2} a_{k}^{(8)}(1) = 229{,}77 + 0{,}37 \times 51{,}55 +$$

$$+ 0{,}59 \times 233{,}80 + 0{,}04 \times 63{,}87 = 387{,}33.$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_{3k}^{1} a_{3k}^{1} + \sum_{k=1}^{3} p_{3k}^{1} a_{k}^{(8)}(1) = 63{,}87 + 0{,}39 \times 51{,}55 +$$

$$+ 0{,}60 \times 233{,}80 + 0{,}01 \times 63{,}87 = 224{,}89.$$

Avem de ales pentru fiecare alternativă valorile maxime încît obținem:

$$a_1^{(7)}(2) = 204{,}57 > 180{,}30$$

$$a_2^{(7)}(2) = 387{,}33 > 387{,}06$$

$$a_3^{(7)}(2) = 224{,}89.$$

Am ales la această etapă pentru faza I alternativa I_2, pentru faza II alternativa II_2 și pentru faza III, alternativa III_1. Mai pe scurt, am ales politica P_{221}.

Trecem acum la determinarea valorilor $a_h^{(6)}(3)$, $h = 1, 2, 3$ prin aplicarea relației

$$a_h^{(6)}(3) = \operatorname*{Max}_{l} \left[\sum_{k=1}^{3} p_{hk}^{l} a_{hk}^{l} + \sum_{k=1}^{3} p_{hk}^{l} a_{k}^{(7)}(2) \right]$$

deoarece valorile $a_h^{(7)}(2)$, $h = 1, 2, 3$ ne sînt cunoscute. Procedînd astfel, în mod iterativ, obținem tabelul 67 (vezi p. 341).

Am rezolvat astfel problema propusă.

Se vede că dacă mașina se găsește la începutul primei etape în faza I, valoarea maximă a productivității pentru 8 etape este 1 133,45. Dacă mașina pornește din faza II, productivitatea maximă este 1 317,85, iar din faza III — 1 153,20. Politicile care conduc la aceste valori sînt pentru primele șapte etape P_{221}, iar pentru ultima etapă P_{211}.

Observație. Din formulele (III.2.11), rezultă că dacă nu ne interesează decît productivitatea dintr-o etapă, trebuie să alegem politica P_{211}. Calculele trecute în primele două linii din tabelul 67 ne arată că dacă ne interesează productivitatea din două etape consecutive,

Scanned with OKEN Scanner

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	Politica aleasă
$a_i^{(8)}(1)$	51,55	233,80	63,87	P_{211}
$a_i^{(7)}(2)$	204,57	387,33	224,89	P_{221}
$a_i^{(6)}(3)$	358,67	542,98	378,30	P_{221}
$a_i^{(5)}(4)$	513,55	697,97	533,32	P_{221}
$a_i^{(4)}(5)$	668,72	852,91	688,26	P_{221}
$a_i^{(3)}(6)$	823,53	1007,95	843,29	P_{221}
$a_i^{(2)}(7)$	978,49	1162,90	998,25	P_{221}
$a_i^{(1)}(8)$	1133,45	1317,85	1153,20	P_{221}

atunci pentru prima avem de ales politica P_{221}, iar pentru a doua P_{211}. Aceasta se explică prin faptul că politica P_{211}, deşi dă cea mai mare productivitate pentru prima etapă, scade atît de mult productivitatea din etapa a doua, încît suma productivităţilor din primele două etape este mai mică decît productivitatea decurgînd din alegerea politicilor P_{221}, P_{211}.

Maximizarea productivităţii unui număr nelimitat de etape

Metoda directă

Ne propunem să găsim un procedeu pentru determinarea valorii $a_i^{(1)}(\infty)$, adică a productivităţii maxime în ipoteza că la începutul primei etape ne găsim în faza i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ şi că nu limităm numărul etapelor. Din examinarea tabelului 67 am văzut că pentru găsirea valorii $a_i^{(1)}(8)$, $i = 1, 2, 3$, a fost necesar ca pentru primele şapte etape să aplicăm politica P_{221}, iar pentru etapa a opta politica P_{211}. Aceasta ne sugerează răspunsul că pentru găsirea productivităţii maxime în n etape $a_i^{(1)}(n)$ este necesar pentru primele $(n - 1)$ etape să aplicăm politica P_{221} şi pentru ultima etapă politica P_{211}, iar pentru $a_i^{(1)}(\infty)$, $i = 1, 2, 3$ să aplicăm consecutiv politica P_{221}.

Vom arăta printr-un calcul direct că acest răspuns este exact.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru lanţurile Marcov cu recompense am arătat că avem formula (III.1.58)

$$M_k(n) = \bar{\theta} n + a_k + 0(\lambda_1'') \tag{III.2.13}$$

unde

$$\bar{\theta} = \frac{\sum\limits_{i,j \in I} P_i p_{ij} a_{ij}}{\sum\limits_{i \in I} P_i}. \tag{III.2.14}$$

După cum se vede, $\bar{\theta}$ este independent de k.

Vom aplica această formulă pentru fiecare din politicile P_{111}, P_{121}, P_{211}, P_{221}.

Pentru P_{111}, matricea probabilităţilor de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}47 & 0{,}28 \\ 0{,}33 & 0{,}55 & 0{,}12 \\ 0{,}39 & 0{,}60 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Matricea A a valorilor a_{ij}, reprezentînd productivitatea, este

$$A = \begin{pmatrix} 124 & 72 & -90 \\ 350 & 250 & -160 \\ 93 & 51 & -300 \end{pmatrix}$$

Probabilităţile limită au respectiv valorile

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3} = 0{,}3141, \quad \frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3} = 0{,}5325, \quad P_3 = 0{,}1534.$$

Calculînd valoarea lui $\bar{\theta}$ prin aplicarea formulei (III.2.14) obţinem

$$\bar{\theta} = 146{,}70.$$

Pentru politica P_{121}, avem matricea

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}47 & 0{,}28 \\ 0{,}37 & 0{,}59 & 0{,}04 \\ 0{,}39 & 0{,}60 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

și valorile a_{ij}, date de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 124 & 72 & -90 \\ 300 & 223 & -320 \\ 93 & 51 & -300 \end{pmatrix}$$

Din P rezultă

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3} = 0{,}3324, \quad \frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3} = 0{,}5513, \quad \frac{P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 0{,}1163$$

încît pentru $\overline{\theta}$ obținem valoarea

$$\overline{\theta} = 147{,}24.$$

Pentru politica P_{211} avem matricea probabilităților de trecere

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}10 \\ 0{,}33 & 0{,}55 & 0{,}12 \\ 0{,}39 & 0{,}60 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

și matricea

$$A = \begin{pmatrix} 123 & 70 & -300 \\ 350 & 250 & -160 \\ 93 & 51 & -300 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\overline{\theta}$ obținem valoarea

$$\overline{\theta} = 153{,}99.$$

În sfîrșit, pentru politica P_{221} avem:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}10 \\ 0{,}37 & 0{,}59 & 0{,}04 \\ 0{,}39 & 0{,}60 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 123 & 70 & -300 \\ 300 & 223 & -320 \\ 93 & 51 & -300 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\theta} = 154{,}95.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, pentru cele patru politici, avem următoarele valori asimptotice pentru $a_i(n)$:

$$\begin{aligned} &P_{111} : a_i\,(n) \simeq 146{,}76n + a_i\,; \qquad i = 1, 2, 3 \\ &P_{121} : a_i\,(n) \simeq 147{,}24n + b_i\,; \qquad i = 1, 2, 3 \\ &P_{211} : a_i\,(n) \simeq 153{,}99n + c_i\,; \qquad i = 1, 2, 3 \\ &P_{221} : a_i\,(n) \simeq 154{,}95n + d_i\,; \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{III.2.15}$$

Se vede că cea mai mare valoare se obţine pentru P_{221}, după cum am constatat şi prin metoda iterativă.

Algoritmul lui Howard

Pentru calculul celei mai avantajoase valori $a_i(\infty)$, $i = 1, 2, \ldots m$, este suficient să stabilim formulele (III.2.15). În general însă numărul politicilor fiind mare este foarte utilă folosirea unui algoritm. În cele ce urmează vom expune algoritmul lui Howard.
Fie

$$P^h = (p_{ij}^h)\,; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$
$$P^k = (p_{ij}^k)\,; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

probabilităţile de trecere pentru două politici h şi k. Notăm prin A^h şi A^k matricele care dau recompensele pentru fiecare politică

$$A^h = (a_{ij}^h)\,; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$
$$A^k = (a_{ij}^k)\,; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Se mai introduc notaţiile

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h a_{ij}^h = b_i^h; \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k a_{ij}^k = b_i^k\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Fie $a_i^h(n)$, $i = 1, \ldots m$ cîştigul maxim prin politica h, în n etape, în ipoteza că s-a pornit în prima etapă de la faza i. $a_i^k(n)$; $i = 1, \ldots m$ are aceeaşi semnificaţie în cazul politicii k. Din formula (III.2.3) rezultă

$$a_i^h(n) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h a_{ij}^h + \sum p_{ij}^h\, a_j^h(n-1)$$

Sau, folosind notaţiile de mai sus,

$$a_i^h(n) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^h a_j^h(n-1) + b_i^h; \quad i = 1, \ldots, m \qquad \text{(III.2.16)}$$

Din (III.1.58) obţinem pentru $a_i^h(n)$ următoarea expresie asimptotică

$$a_i^h(n) \simeq \theta^h \cdot n + \varphi_i^h; \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad \text{(III.2.17)}$$

Această relaţie este valabilă, după cum am văzut, în cazul cînd $\lambda = 1$ este singura valoare proprie egală în modul cu 1, a matricei probabilităţilor de trecere.

θ^h şi φ_i^h sînt nişte constante.

Înlocuind valorile $a_i^h(n)$ date de (III.2.17) în (III.2.16) avem

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h - \varphi_i^h = \theta^h - b_i^h; \quad i = 1, \ldots, m. \qquad \text{(III.2.18)}$$

Determinantul principal al sistemului (III.2.18) este nul. Sistemul nu devine compatibil decît dacă

$$\theta^h = \sum_{i=1}^{m} Q_i^h b_i^h \qquad \text{(III.2.19)}$$

unde

$$Q_i^h = \frac{P_i^h}{\sum_{i=1}^{m} P_i^h}$$

iar P_i^h este minorul elementului $p_{ii}^h - 1$ din determinantul $|P^h - E|$.

Să mai observăm că dacă φ_j^h, $j = 1, \ldots m$ este o soluţie a sistemului (III.2.18) şi $\varphi_j^h + C$, unde C este o constantă arbitrară, este de asemenea o soluţie.

Într-adevăr avem

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h (\varphi_j^h + C) - (\varphi_i^h + C) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h - \varphi_i^h$$

Cum φ_j^h; $j = 1, \ldots, m$ sînt stabilite din (III.2.18), cu excepţia unei constante, vom presupune de aici înainte $\varphi_m^h = 0$. Vom găsi atunci din sistemul (III.2.18) nişte valori bine determinate pentru φ_j^h, $j = 1, \ldots m$.

Scanned with OKEN Scanner

Să admitem acum că sînt îndeplinite inegalităţile

$$b_i^h + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h > b_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_j^h \; ; \; i = 1, \ldots, m \qquad \text{(III.2.20)}$$

Relaţiile (III.2.18) scrise pentru ambele politici h şi k sînt

$$\theta^h - b_i^h = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h - \varphi_i^h; \; i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\theta^k - b_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_j^k - \varphi_i^k; \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Scăzînd aceste egalităţi, rezultă

$$\theta^h - \theta^k - (b_i^h - b_i^k) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_j^k - (\varphi_i^h - \varphi_i^k) \qquad \text{(III.2.21)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Introducem numerele: γ_i; $i = 1, 2, \ldots, m$.

$$\gamma_i = b_i^h - b_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_j^h \; ; \; i = 1, \ldots m \qquad \text{(III.2.22)}$$

În baza relaţiilor (III.2.20) avem

$$\gamma_i > 0 \; ; \; i = 1, \ldots, m.$$

Din (III.2.22) obţinem

$$b_i^h - b_i^k = \gamma_i - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^h \varphi_j^h + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_j^h \; ; \; i = 1, \ldots m \qquad \text{(III.2.23)}$$

Înlocuind diferenţele $b_i^h - b_i^k$; $i = 1, \ldots, m$ prin valorile din (III.2.23) în (III.2.21) avem

$$\theta^h - \theta^k - \gamma_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k (\varphi_j^h - \varphi_j^k) - (\varphi_i^h - \varphi_i^k), \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Să înmulţim această relaţie cu Q_i^k şi să adunăm relaţiile astfel obţinute pentru $i = 1, 2, \ldots, m$.

Rezultă

$$\theta^h - \theta^k = \sum_{i=1}^{m} Q_i^k \gamma_i > 0, \qquad \text{(III.2.24)}$$

deoarece $\gamma_i > 0$; $i = 1, \ldots, m$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare dacă sînt îndeplinite inegalităţile (III.2.20) avem $\theta^h > \theta^k$ şi deci politica h este mai avantajoasă decît k.

Algoritmul lui Howard se bazează pe această observaţie.

La începutul unei etape, rezolvăm sistemul (III.2.18) şi găsim valorile φ_j^h ; $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $\varphi_m^h = 0$.

Determinăm

$$\max_k \left[b_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \varphi_{ij}^h \right]; \quad i = 1, 2, \ldots m \qquad \text{(III.2.25)}$$

maximul fiind luat în raport cu k.

Fie $k = l$, valoarea lui k pentru care obţinem maximul. Faza h este înlocuită prin faza l şi procedînd astfel pentru toate fazele obţinem o nouă politică, mai avantajoasă, pentru care aplicăm algoritmul în continuare.

Este uşor de constatat că pînă la sfîrşit algoritmul conduce la soluţia optimă. Într-adevăr să admitem că $\theta^h > \theta^k$ şi că algoritmul nostru s-a oprit la θ^k. Aceasta înseamnă că toate valorile γ_i ; $i = 1, \ldots m$ sînt negative şi deci în baza relaţiei (III.2.25) avem de data aceasta $\theta^h < \theta^k$, ceea ce contrazice ipoteza.

Aplicarea algoritmului lui Howard

Vom aplica algoritmul lui Howard la exemplul numeric considerat. Ne alegem politica P_{111}. Prin calculele anterioare am stabilit că în acest caz $\bar{\theta} = 146{,}76$.

Alegînd $\varphi_3 = 0$, sistemul (III.2.18) este

$$-0{,}75\,\varphi_1 + 0{,}47\,\varphi_2 = 107{,}12$$
$$0{,}33\,\varphi_1 - 0{,}45\,\varphi_2 = -87{,}10$$

şi are soluţiile $\varphi_1 = -39{,}84$, $\varphi_2 = 164{,}35$.

Expresiile (III.2.25) devin :

$$I_1 = 39{,}64 - 0{,}25 \times 39{,}84 + 0{,}47 \times 164{,}35 = 106{,}92$$
$$I_2 = 51{,}55 - 0{,}35 \times 39{,}84 + 0{,}55 \times 164{,}35 = 128$$
$$II_1 = 233{,}80 - 0{,}33 \times 39{,}84 + 0{,}55 \times 164{,}35 = 311{,}04$$
$$II_2 = 229{,}77 - 0{,}37 \times 39{,}84 + 0{,}59 \times 164{,}35 = 309{,}00.$$

Ţinînd seamă de valorile maxime 128 pentru faza I şi 311,04 pentru faza II, trebuie să înlocuim politica P_{111} prin P_{211}.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr din calculele făcute în rezolvarea anterioară a aceleiași expresii, am văzut că valoarea lui θ pentru P_{211} este $153,99 > > 146,76$.

Continuăm algoritmul pornind acum de la politica P_{211}. De data aceasta $\theta = 153,99$ iar sistemul (III.2.18) este

$$-0,65\,\varphi_1 + 0,55\,\varphi_2 = 102,44$$
$$0,33\,\varphi_1 - 0,45\,\varphi_2 = -79,81$$

Soluția acestui sistem este

$$\varphi_1 = -21,80, \qquad \varphi_2 = 161,36.$$

Expresiile (III.2.25) sînt:

$$I_1 = 39,64 - 0,25 \times 21,80 + 0,47 \times 161,36 = 110,03$$
$$I_2 = 51,55 - 0,35 \times 21,80 + 0,55 \times 161,36 = 132,67$$
$$II_1 = 233,80 - 0,33 \times 21,80 + 0,55 \times 161,36 = 315,36$$
$$II_2 = 229,77 - 0,37 \times 21,80 + 0,59 \times 161,36 = 316,90.$$

Pentru faza I trebuie să alegem alternativa a doua corespunzătoare maximului 132,67, iar pentru faza II alternativa a doua, corespunzătoare maximului 316,90, deci alegem politica P_{221}.

Într-adevăr pentru această politică avem $\theta = 154,95$ cea mai mare valoare a lui θ, după cum am văzut prin calculul direct.

Prin algoritmul Howard am ajuns la soluția optimă după două încercări. Aplicînd mai departe algoritmul, se poate ușor constata că trebuie să rămînem la politica P_{221}.

Cazul în care activitatea se întrerupe cu o probabilitate dată

Am examinat pînă acum cazul în care numărul etapelor este finit și cel în care este nelimitat. Rămîne să examinăm cazul în care durata activității variază în mod aleator. Pentru rezolvarea acestei probleme trebuie să se cunoască distribuția duratei. Ne referim în cele ce urmează la cel mai simplu caz, și anume, cînd există o probabilitate $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ ca activitatea existentă la începutul etapei n să nu mai fie reluată la începutul etapei $n + 1$. α reprezintă probabilitatea ca activitatea existentă la începutul etapei n să continue și în etapa $n + 1$. Se vede că $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$ nu prezintă interes deoarece $\alpha = 0$ se referă la existența unei singure etape, iar $\alpha = 1$, corespunde cazului în care durata este nelimitată, caz pe care l-am examinat.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera în primul rînd cazul unei singure politici, deci avem un lanţ Marcov, omogen şi finit, cu recompense.

Fie

$$P = (p_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

matricea probabilităţilor de trecere.

Notăm prin a_{ij} valoarea pe care o ia lanţul cînd trece de la starea i la starea j; $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Variabilele succesive ale lanţului le notăm prin

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

şi considerăm suma

$$X_{(n)} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,;\ n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(III.2.26)}$$

Conform ipotezei admise, X_n poate lua valorile

$$(\alpha^{n-1} a_{ij})\,; \qquad i, j = 1, 2, \ldots m.$$

Avem

$$\mathbf{P}(X_n = \alpha^{n-1} a_{jl} | X_{n-1} = \alpha^{n-2} a_{ij}) = p_{jl}\,;\ j, l = 1, 2, \ldots m$$

Să evaluăm funcţia caracteristică a variabilei $X_{(n)}$ în ipoteza că X_1 ia valorile a_{kj}; $j = 1, 2, \ldots, m$ cu probabilităţile respective p_{kj},

$$p_{kj} \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} p_{kj} = 1.$$

Notăm prin $F_k(n\,; t)$ această funcţie caracteristică.

Avem

$$F_k(n\,; t) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_n = 1}^{m} p_{kj_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} e^{it(a_{kj_1} + \alpha a_{j_1 j_2} + \ldots + \alpha^{n-1} a_{j_{n-1} j_n})}$$

Rezultă

$$F_k(n\,; t) = \sum_{j_1=1}^{m} p_{kj_1} e^{ita_{kj_1}} F_{j_1}(n-1\,; t\alpha)$$

sau

$$F_k(n\,; t) = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} e^{ita_{kj}} F_j(n-1;\ \alpha t). \qquad \text{(III.2.27)}$$

Din această relaţie putem deduce valoarea funcţiei caracteristice $F_k(n\,; t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Deocamdată ne vom ocupa cu valoarea medie a lui $X_{(n)}$.

Să notăm prin $M_k(n)$ valoarea medie a variabilei $X_{(n)}$ în ipoteza că X_1 ia valorile a_{kj}; $j = 1, 2, \ldots, m$ cu probabilităţile p_{kj}; $j = 1, 2, \ldots, m$. Deoarece

$$iM_k(n) = [F_k'(n;t)]_{t=0},$$

din (III.2.27) obţinem prin derivare

$$M_k(n) = \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{kj} M_j(n-1) + a_k \qquad \text{(III.2.28)}$$

unde

$$a_k = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} a_{kj}.$$

Din (III.2.28) se constată că $M_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ este iterata de rangul n a transformării

$$(T) \quad y_k = \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{kj} x_j + a_k \qquad \text{(III.2.29)}$$

şi deci $M_k(n)$ este de forma

$$M_k(n) = \sum_{s=1}^{p} A_{k,s} P_{m_s-1}(\lambda_s)\lambda_s^n + B_k \qquad \text{(III.2.30)}$$

unde

1° $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sînt rădăcinile ecuaţiei

$$|\lambda E - \alpha P| = 0 \qquad \text{(III.2.31)}$$

E fiind matricea unitate, iar

$$P = (p_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, m;$$

2° $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sînt respectiv ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$;

3° $P_{m_s-1}(\lambda)$ este un polinom în λ de gradul $m_s - 1$;

4° $A_{k,s}$ şi B_k sînt nişte constante.

Se poate constata uşor că

$$|\lambda_s| < 1,\ s = 1, 2, \ldots, p.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr din (III.2.31) rezultă că există un sistem de m numere $z_1, z_2, \ldots, z_m$ nu toate nule, astfel încît să avem:

$$\begin{aligned}
&\alpha p_{11}z_1 + \alpha p_{12}z_2 + \ldots + \alpha p_{1m}z_m = \lambda_s z_1 \\
&\alpha p_{21}z_1 + \alpha p_{22}z_2 + \ldots + \alpha p_{2m}z_m = \lambda_s z_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha p_{m1}z_1 + \alpha p_{m2}z_2 + \ldots + \alpha p_{mm}z_m = \lambda_s z_m
\end{aligned}$$

Din aceste relaţii, deducem:

$$|\lambda_s|\,|z_h| \leqslant \alpha p_{h1}\,|z_1| + \alpha p_{h2}\,|z_2| + \ldots + \alpha p_{hm}|z_m| \quad h = 1, 2, \ldots, m$$

Admitem că $|z_h|$ este cel mai mare dintre numerele $z_1\ z_2 \ldots z_m$. Deducem atunci mai departe că:

$$|\lambda_s| \leqslant \alpha p_{h1}\frac{|z_1|}{|z_h|} + \alpha p_{h2}\frac{|z_2|}{|z_h|} + \ldots + \alpha p_{hm}\frac{|z_m|}{|z_h|}$$

sau

$$|\lambda_s| \leqslant \alpha p_{h1} + \ldots + \alpha p_{hm} \leqslant \alpha < 1,$$

oricare ar fi $s = 1, 2, \ldots p$

Prin urmare, ţinînd seamă de (III.2.30) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} M_k\,(n) = B_k$$

Oricare ar fi $\alpha < 1$ valoarea $M_k(n)$, pentru $n \to \infty$, tinde către o limită finită, spre deosebire de cazul $\alpha = 1$ pe care l-am examinat, cînd $M_k\,(n)$ tindea către infinit.

Vom nota

$$\lim_{n\to\infty} M_k(n) = M_k^{\infty} \qquad \text{(III.2.32)}$$

şi din (III.2.28) deducem

$$M_k^{\infty} = \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{kj} M_j^{\infty} + a_k\,; \qquad k = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{(III.2.33)}$$

Rezolvarea sistemului liniar (III.2.33) ne conduce la valorile M_k^{∞} exprimate în funcţie de α, de elementele matricei P şi de valorile cunoscute $a_k (k = 1, \ldots, m)$.

Din relaţiile (III.2.28) prin derivări succesive obţinem astfel celelalte momente ale variabilei $X_{(n)}$, precum şi dispersia acestei variabile.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd sînt mai multe politici, vom proceda în același mod ca și pentru $\alpha = 1$.

Păstrînd aceleași notații ca și pînă acum, notăm prin $\xi_i^l(n)$ productivitatea mașinii în n etape, pornind de la etapa întîi, în ipoteza că mașina pornește din faza i cu alternativa l.

Notăm

$$\mathbf{E}(\xi_i^l(n)) = M_i^l(n).$$

Relația (III.2.28) în acest caz devine

$$M_i^l(n) = \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l M_j^k(n-1) + a_i^l \qquad \text{(III.2.34)}$$

notînd prin k alternativa pe care ne-am ales-o la apariția fazei j și prin

$$a_i^l = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^l a_{ij}^l. \qquad \text{(III. 2.35)}$$

Din relația (III.2.34) rezultă că $M_i^l(n)$ se obține prin aplicarea succesivă de n ori a transformării liniare

$$(T_l): \qquad Y' = R^l Y + A^l$$

unde

$$R^l = \alpha P^l = \alpha(p_{ij}^l); \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

$$A^l = \begin{pmatrix} a_1^l \\ \vdots \\ a_m^l \end{pmatrix}$$

Transformarea T_l aplicată consecutiv duce la vectorul limită $(E - R^l)^{-1} A^l$. Fie

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Vom scrie

$$Y \leqslant Z$$

dacă

$$y_1 \leqslant z_1, \; y_2 \leqslant z_2, \; \ldots, \; y_m \leqslant z_m.$$

Să aplicăm transformarea T_h vectorului $(E - R^l)^{-1}A^l$. Obţinem

$$R^h(E - R^l)^{-1}A^l + A^h.$$

Să admitem că vectorul astfel obţinut este mai mare decît $(E - R^l)^{-1}A^l$. Cu alte cuvinte, avem

$$R^h(E - R^l)^{-1}A^l + A^h > (E - R^l)^{-1}A^l \qquad \text{(III.2.36)}$$

sau

$$A^h > (E - R^l)^{-1}A^l - R^h(E - R^l)^{-1}A^l \qquad \text{(III.2.37)}$$

sau

$$A^h > (E - R^h)(E - R^l)^{-1}A^l \qquad \text{(III.2.38)}$$

Pe de altă parte avem

$$(E - R^h)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} R^s$$

şi cum

$$R > 0$$

rezultă

$$(E - R^h)^{-1} > 0.$$

De aici rezultă că putem înmulţi ambii membri ai inegalităţii (III.2.38) prin $(E - R^h)^{-1}$ fără ca sensul inegalităţii să se schimbe. Astfel avem :

$$(E - R^h)^{-1}A^h > (E - R^l)^{-1}A^l \qquad \text{(III.2.39)}$$

Prin urmare, inegalitatea (III.2.36) are drept consecinţă inegalitatea (III.2.39). Aceasta înseamnă că dacă aplicînd transformarea T_h vectorului limită al transformării T_l găsim un vector mai mare decît acest vector limită, vectorul limită al lui T_h este mai mare decît vectorul limită al lui T_l. Algoritmul lui Howard se bazează pe această observaţie.

Fie două politici A şi B.
Notăm prin

$$M^A = \begin{pmatrix} M_1^A \\ \vdots \\ M_m^A \end{pmatrix}, \qquad M^B = \begin{pmatrix} M_1^B \\ \vdots \\ M_m^B \end{pmatrix}$$

vectori limită pentru transformările T_A şi T_B.

Scanned with OKEN Scanner

Conform acestei notații avem

$$M^A = R^A M^A + a^A \tag{III.2.40}$$

$$M^B = R^B M^B + a^B \tag{III.2.41}$$

Prin ipoteză

$$R^B M^A + a^B > R^A M^A + a^A.$$

Prin urmare

$$\gamma = R^B M^A + a^B - R^A M^A - a^A > 0. \tag{III.2.42}$$

Din (III.2.40) și (III.2.41) deducem

$$M^B - M^A = R^B M^B + a^B - R^A M^A - a^A$$

sau, ținînd seamă de (III.2.42), avem

$$M^B - M^A = R^B(M^B - M^A) + \gamma$$

$$M^B - M^A = (E - R^B)^{-1}\gamma > 0. \tag{III.2.43}$$

deoarece

$$(E - R^B)^{-1} > 0, \qquad \gamma > 0.$$

Prin urmare

$$M^B > M^A$$

ceea ce revine la inegalitatea (III.2.39).

Un exemplu de programare marcoviană cu întrerupere aleatoare

Reluăm exemplul pe care l-am tratat pentru programarea marcoviană.

O mașină poate lucra în trei faze: I, II, III. Pentru fazele I și II există cîte două alternative: I_1, I_2; II_1, II_2. Se cunosc probabilitățile de trecere

$$\begin{pmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 & p_{13}^1 \\ p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 & p_{23}^1 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

care sînt respectiv egal cu:

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}47 & 0{,}28 \\ 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}10 \\ 0{,}33 & 0{,}55 & 0{,}12 \\ 0{,}37 & 0{,}59 & 0{,}04 \\ 0{,}39 & 0{,}60 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Productivitatea muncii este este dată de

$$\begin{pmatrix} 124 & 72 & -90 \\ 123 & 70 & -300 \\ 350 & 250 & -160 \\ 300 & 223 & -320 \\ 93 & 51 & -300 \end{pmatrix}$$

De exemplu, dacă se realizează evenimentul cu probabilitatea p_{22}^1 atunci mașina are o productivitate orară egală cu 250 lei.

Corespunzător acestor date avem de ales între următoarele patru politici P_{111}, P_{211}, P_{121}, P_{221} (vezi tabelele 63—66 pag. 335—336).

Admitem că la începutul fiecărei etape probabilitatea ca activitatea să continue și la începutul etapei următoare este egală cu $\alpha = 0{,}80$.

În asemenea condiții, ne propunem să determinăm politica cea mai favorabilă.

Pornim de la politica P_{111}.

Sistemul (III.2.33) corespunzător acestei politici este

$$\begin{aligned} M_1^\infty &= 0{,}8[0{,}25M_1^\infty + 0{,}47M_2^\infty + 0{,}28M_3^\infty] + 39{,}64 \\ M_2^\infty &= 0{,}8[0{,}33M_1^\infty + 0{,}55M_2^\infty + 0{,}12M_3^\infty] + 233{,}80 \\ M_3^\infty &= 0{,}8[0{,}39M_1^\infty + 0{,}60M_2^\infty + 0{,}01M_3^\infty] + 63{,}87. \end{aligned} \qquad \text{(III.2.44)}$$

Acest sistem admite soluția:

$$M_1^\infty = 620{,}29; \qquad M_2^\infty = 822{,}63; \qquad M_3^\infty = 657{,}53 \qquad \text{(III.2.45)}$$

Pentru a stabili inegalitățile (III.2.36), vom aplica celelalte trei politici P_{121}, P_{211}, P_{221} pornind de la valorile (III.2.45).

Găsim următoarele rezultate:

Pentru P_{121}

$$0{,}8[0{,}25 \times 620{,}29 + 0{,}47 \times 822{,}63 + 0{,}28 \times 657{,}53] + \\ + 39{,}64 = 620{,}29$$

Scanned with OKEN Scanner

$$0,8[0,37 \times 620,29 + 0,58 \times 822,63 + 0,04 \times 657,53] + \\ + 229,77 = 822,70$$

$$0,8[0,39 \times 620,29 + 0,60 \times 822,63 + 0,01 \times 657,53] + \\ + 63,87 = 657,53$$

Pentru P_{211}

$$0,8[0,35 \times 620,29 + 0,55 \times 822,63 + 0,10 \times 657,53] + \\ + 51,55 = 639,79$$

$$0,8[0,33 \times 620,29 + 0,55 \times 822,63 + 0,12 \times 657,53] + \\ + 233,80 = 822,63$$

$$0,8[0,39 \times 620,29 + 0,60 \times 822,63 + 0,01 \times 657,53] + \\ + 63,87 = 657,53$$

Pentru P_{221}

$$0,8[0,35 \times 620,29 + 0,55 \times 822,63 + 0,10 \times 657,53] + \\ + 51,55 = 639,79$$

$$0,8[0,37 \times 620,29 + 0,59 \times 822,63 + 0,04 \times 657,53] + \\ + 229,77 = 822,70$$

$$0,8[0,39 \times 620,29 + 0,60 \times 822,63 + 0,01 \times 657,53] + \\ + 63,87 = 657,53$$

Valorile maxime se obţin pentru politica P_{221}.
Va trebui acum să rezolvăm sistemul:

$$\begin{aligned} M_1^\infty &= 0,8[0,35\,M_1^\infty + 0,55\,M_2^\infty + 0,10\,M_3^\infty] + 51,55 \\ M_2^\infty &= 0,8[0,37\,M_1^\infty + 0,59\,M_2^\infty + 0,04\,M_3^\infty] + 229,77 \\ M_3^\infty &= 0,8[0,39\,M_1^\infty + 0,60\,M_2^\infty + 0,01\,M_3^\infty] + 63,87 \end{aligned} \quad \text{(III.2.46)}$$

Soluţia sistemului (III.2.46) este

$$M_1^\infty = 668,13 \quad M_2^\infty = 851,33 \quad M_3^\infty = 686,46 \quad \text{(III.2.47}$$

Aplicăm acum politicile P_{111}, P_{211} şi P_{121} pornind de la valorile (III.2.47).

Scanned with OKEN Scanner

Găsim următoarele rezultate

Pentru P_{111}

$$0{,}8[0{,}25 \times 668{,}13 + 0{,}47 \times 851{,}33 + 0{,}28 \times 686{,}46] + 39{,}64 = 647{,}13$$

$$0{,}8[0{,}33 \times 668{,}13 + 0{,}55 \times 851{,}33 + 0{,}12 \times 686{,}46] + 233{,}80 = 850{,}67$$

$$0{,}8[0{,}39 \times 668{,}13 + 0{,}60 \times 851{,}33 + 0{,}01 \times 686{,}46] + 63{,}87 = 686{,}47$$

Pentru P_{211}

$$0{,}8[0{,}35 + 668{,}13 + 0{,}55 \times 851{,}33 + 0{,}10 \times 686{,}46] + 51{,}55 = 668{,}84$$

$$0{,}8[0{,}33 \times 668{,}13 + 0{,}55 \times 851{,}33 + 0{,}12 \times 686{,}46] + 233{,}80 = 850{,}67$$

$$0{,}8[0{,}39 \times 668{,}13 + 0{,}60 \times 851{,}33 + 0{,}01 \times 686{,}46] + 63{,}87 = 686{,}47$$

Pentru P_{121}

$$0{,}8[0{,}25 + 668{,}13 + 0{,}47 \times 851{,}33 + 0{,}28 \times 686{,}46] + 39{,}64 = 647{,}13$$

$$0{,}8[0{,}37 \times 668{,}13 + 0{,}59 \times 851{,}33 + 0{,}04 \times 686{,}46] + 229{,}77 = 851{,}35$$

$$0{,}8[0{,}39 \times 668{,}13 + 0{,}60 \times 851{,}33 + 0{,}01 \times 686{,}46] + 63{,}87 = 686{,}46$$

Pentru P_{221}

$$0{,}8[0{,}35 \times 668{,}13 + 0{,}55 \times 851{,}33 + 0{,}10 \times 686{,}46] + 51{,}55 = 668{,}84$$

$$0{,}8[0{,}37 \times 668{,}13 + 0{,}59 \times 851{,}33 + 0{,}04 \times 686{,}46] + 229{,}77 = 851{,}35$$

$$0{,}8[0{,}39 \times 668{,}13 + 0{,}60 \times 851{,}33 + 0{,}01 \times 686{,}46] + 63{,}87 = 686{,}46$$

Valorile maxime se obţin tot pentru politica P_{221}. Deci tragem concluzia că P_{221} reprezintă soluţia optimă.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE FINITE ȘI OMOGENE

Considerații generale

Lanțurile cu legături complete constituie o generalizare naturală a lanțurilor Marcov.

Să considerăm un cîmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, \mathbf{P})$ și $X_i(\omega)$, $i \in N^*$ un șir de variabile aleatoare definite pe acest cîmp. Variabilele X_i, $i \in N^*$ trec prin mulțimea finită de stări $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$.

Notăm

$$\mathbf{P}(X_n = j_n \mid X_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-2} = j_{n-2}, \ldots, X_1 = j_1) = p_{j_1 j_2, \ldots, j_{n-1}; j_n} \quad j_1, j_2, \ldots, j_n \in I \tag{III.3.1}$$

$$\bar{p}_{j_1 j_2, \ldots, j_{n-1}} = \{p_{j_1, \ldots, j_{n-1}, 1};\ p_{j_1, \ldots, j_{n-1}, 2};\ \ldots, p_{j_1, \ldots, j_{n-1}, n}\} \tag{III.3.2}$$

Avem evident

$$p_{j_1, \ldots, j_{n-1}, j_n} \geqslant 0$$

$$\sum_{j_n \in I} p_{j_1, \ldots, j_{n-1}; j_n} = 1$$

Definiția 1. Dacă oricare ar fi $j_1, j_2, \ldots, j_n \in I$ avem

$$p_{j_1, \ldots, j_{n-1}; j_n} = \Psi_{j_{n-1}, j_n}(\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}), \tag{III.3.3}$$

unde $\Psi_{j_{n-1}, j_n}(\bar{p}), j_{n-1}, j_n \in I$ sînt funcții date de vectorul $\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}$ îndeplinind condițiile

$$\Psi_{j_{n-1} j_n}(\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}) \geqslant 0$$

$$\sum_{j_n \in I} \Psi_{j_{n-1} j_n}(\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}) = 1,$$

variabilele X_n, $n \in N^*$ formează un lanț cu legături complete simplu și omogen.

Definiția 2. Dacă oricare ar fi $j_1, j_2, \ldots, j_n \in I$ avem

$$p_{j_1 j_2, \ldots, j_{n-1}; j_n} = \Psi_{j_{n-s}, j_{n-s+1}, \ldots, j_{n-1}; j_n}[\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-s-1}}, \bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-s}}, \ldots, \bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}] \tag{III.3.4}$$

unde

$$\Psi_{j_{n-s}, j_{n-s+1}, \ldots, j_{n-1}; j_n}[\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-s-1}}, \bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-s}}, \ldots, \bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}]$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt funcţii date de vectorii

$$\bar{p}_{j_1,\ldots,j_{n-s-1}}, \bar{p}_{j_1,\ldots,j_{n-s}}, \ldots, \bar{p}_{j_1,\ldots,j_{n-2}},$$

îndeplinind condiţiile

$$\Psi_{j_{n-s},j_{n-s+1},\ldots j_n}[\bar{p}_{j_1\ldots j_{n-s-1}}, \bar{p}_{j_1\ldots j_{n-s}}, \ldots \bar{p}_{j_1\ldots j_{n-2}}] \geqslant 0$$

$$\sum_{j_n \in I} \Psi_{j_{n-s},j_{n-s+1},\ldots j_{n-1},j_n}[\bar{p}_{j_1\ldots j_{n-s-1}}, \bar{p}_{j_1\ldots j_{n-s}}, \ldots \bar{p}_{j_1\ldots j_{n-2}}] = 1,$$

variabilele X_n, $n \in N^*$ formează un lanţ cu legături complete multiplu de ordinul s, omogen.

Este de observat că dacă funcţiile (III.3.3) se reduc la nişte constante, succesiunea X_n, $n \in N^*$ devine un lanţ Marcov, simplu şi omogen. Dacă funcţiile (III.3.4) sînt nişte constante, succesiunea X_n, $n \in N^*$ este un lanţ Marcov, multiplu de ordinul s, omogen.

Pentru ca un lanţ simplu cu legături complete să fie definit trebuie să fie cunoscute probabilităţile iniţiale

$$\mathbf{P}(X_1 = a_i) = p_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, m+1 \qquad \text{(III.3.5)}$$

Pentru un lanţ cu legături complete de ordinul s, trebuie să cunoaştem grupul de probabilităţi iniţiale privind variabilele X_1, X_2, $\ldots$, X_s.

Pentru simplificare, indicăm probabilităţile iniţiale pentru un lanţ multiplu de ordinul doi.

Notăm

a. $\mathbf{P}(X_1 = a_i) = p_i$; $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1$;

b. $\mathbf{P}(X_2 = a_j / X_1 = a_i) = \varphi_{i;j}(p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}) = \varphi_{i;j}(\bar{p})$
$(i, j, = 1, 2, \ldots m+1)$

unde, pentru prescurtare, am notat*

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}), \quad \sum_{j=1}^{m+1} \varphi_{i;j}(\bar{p}) = 1. \qquad \text{(III.3.6)}$$

$\varphi_{i;j}(\bar{p})$ sînt funcţii date de $\bar{p}$, luînd pentru fiecare $\bar{p}$ valori cuprinse între 0 şi 1, care verifică relaţia precedentă;

c. $\mathbf{P}(X_3 = a_k / X_2 = a_j;\ X_1 = a_i) =$
$= \Psi_{i;j;k}\{p_1, \ldots, p_{m+1}, \varphi_{i;1}(p_1, \ldots, p_{m+1}) \ldots \varphi_{i;m+1}(p_1, \ldots, p_{m+1})\} =$
$= \Psi_{i;j;k}\{\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})\}$; $\quad i, j, k = 1, 2, \ldots, m+1$

* Prin $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vom înţelege un vector linie, iar prin $[x_1, \ldots, x_m]$ un vector coloană.

Scanned with OKEN Scanner

unde pentru prescurtare am notat

$$\varphi_i(\bar{p}) = (\varphi_{i;1}(\bar{p}), \ldots, \varphi_{i;m+1}(\bar{p})) \tag{III.3.7}$$

$\Psi_{i;j;k}$ sînt funcţii date de $\bar{p}$ şi $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$ cuprinse între 0 şi 1 verificînd pentru fiecare $i, j, \in (1, 2, \ldots, m+1)$ relaţia

$$\sum_{k=1}^{m+1} \Psi_{i;j;k}\{\bar{p}, \varphi_i(\bar{p})\} = 1; \tag{III.3.8}$$

d. $\mathbf{P}\{X_4 = a_l / X_3 = a_k, X_2 = a_j; X_1 = a_i\} = \Psi_{j;k;l}\{\bar{\varphi}_j(\bar{p}); \bar{\Psi}_{j;k}(\bar{p}; \bar{\varphi}_i(\bar{p})\}$

unde am folosit notaţia

$$\bar{\Psi}_{i;j}[\bar{p}; \varphi_i(\bar{p})] = (\Psi_{i;j;1}\{\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})\}, \ldots, \Psi_{i;j;m+1}\{\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})\}). \tag{III.3.9}$$

Funcţia $\Psi_{j;k;l}$ este definită la punctul c. După cum se vede ea variază numai în raport cu indicii j, k, l, dintre care primii doi, se referă la valorile a_k, a_j luate de variabilele X_3, X_2 iar ultimul indice l la valoarea a_i luată de variabila X_4. Lanţul este multiplu de ordinul doi pentru că funcţia $\Psi_{j;k;l}$ este aceeaşi oricare ar fi valoarea luată de variabila aleatoare X_1.

Argumentele de care depinde funcţia $\Psi_{j;k;l}$ sînt respectiv $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$ şi $\bar{\Psi}_{i;j}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})]$ care în conformitate cu punctele b şi c reprezintă respectiv probabilităţile condiţionate ale variabilelor aleatoare X_2, X_3.

e. Pentru cazul $n > 4$ introducem notaţiile:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_n = a_{j_n} / X_{n-1} = a_{j_{n-1}}, X_{n-2} = \\ &= a_{j_{n-2}}, \ldots, X_1 = a_{j_1}) = p_{j_1, j_2, \ldots, i_n} \\ &\bar{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} = (p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, 1}, \\ &p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, 2}, \ldots, p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, m+1}) \end{aligned} \tag{III.3.10}$$

Prin definiţie, avem

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \Psi_{j_{n-2}; j_{n-1}; j_n}(\bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-3}}; \bar{p}_{j_1, \ldots, j_{n-2}}) \tag{III.3.11}$$

Relaţia (III.3.11) ne arată că probabilitatea egalităţii $X_n = a_{j_n}$ condiţionată de şirul $a_{j_{n-1}}, a_{j_{n-2}}, \ldots, a_{j_1}$ de valori luate de variabilele precedente $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1$ este o funcţie dată care depinde de valorile $a_{j_{n-2}}$ şi $a_{j_{n-1}}$ avînd ca argument probabilităţile corespunzătoare valorilor X_{n-2} şi X_{n-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta cîteva proprietăţi importante ale lanţurilor cu legături complete de ordinul al doilea. Extensia lor la lanţurile multiplu de ordin finit nu prezintă nici o dificultate.

O teoremă de ergodicitate

Notăm

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = a_i) = P_i^{(n+1)}\{\bar{p}\,;\,\bar{\varphi}(\bar{p})\} \tag{III.3.12}$$

unde

$$\bar{\varphi}(\bar{p}) = [\bar{\varphi}_1(\bar{p}), \bar{\varphi}_2(\bar{p}), \ldots, \bar{\varphi}_{m+1}(\bar{p})] \tag{III.3.13}$$

Pentru că suma elementelor din fiecare linie este egală cu 1, matricea $\bar{\varphi}(\bar{p})$ conţine $m(m+1)$ elemente „independente".

Fiind date funcţiile fundamentale $\Psi_{i;j;k}$ probabilitatea (III.3.12) depinde de condiţiile iniţiale, date la punctele a şi b.

Această probabilitate verifică relaţia de recurenţă fundamentală

$$P_i^{(m+1)}\{\bar{p},\ \bar{\varphi}(\bar{p})\} = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(n)}\{\bar{\varphi}_j(\bar{p})\,;\,\bar{\Psi}_j(\bar{p},\ \bar{\varphi}_j(\bar{p}))\} \tag{III.3.14}$$

După cum se vede, în membrul al doilea între paranteze în locul vectorului $\bar{p}$ apare vectorul $\bar{\varphi}_j(\bar{p})$, iar în locul matricei $\bar{\varphi}(\bar{p})$ apare matricea $\bar{\Psi}_j[\bar{p},\ \bar{\varphi}_j(\bar{p})]$, definită de egalitatea

$$\bar{\Psi}_j[\bar{p}\,;\,\bar{\varphi}_j(\bar{p})] = [\bar{\Psi}_{j;1}\{\bar{p},\bar{\varphi}_j(\bar{p})\}\,;\,\ldots;\bar{\Psi}_{j;m+1}\{\bar{p},\bar{\varphi}_j(\bar{p})\}]. \tag{III.3.15}$$

Această matrice conţine $m(m+1)$ elemente distincte.

Se poate demonstra, la fel ca şi pentru lanţurile Marcov, că există unele proprietăţi de ergodicitate.

Definiţia 3. Dacă este îndeplinită condiţia

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}\{\bar{p}\,;\,\bar{\varphi}(\bar{p})\} = P_i \tag{III.3.16}$$

unde P_i este o constantă, care rămîne aceeaşi oricare ar fi valorile iniţiale $\bar{p}$ şi $\bar{\varphi}(\bar{p})$, lanţul este ergodic.

Definiţia 4. Un lanţ cu legături complete care îndeplineşte condiţiile teoremei I (care urmează) este un lanţ $\mathcal{L}$.

Teorema I. Dacă sînt verificate condiţiile următoare:

1°. Funcţiile $\varphi_{i;j}(\bar{p})$ sînt continue în raport cu fiecare $0 \leqslant p_j \leqslant 1$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ şi admit derivate parţiale continue şi mărginite în acest domeniu, în raport cu p_i; $i = 1, 2, \ldots, m$.

2°. Domeniul Δ al punctelor din spaţiul $R^{m(m+2)}$ definit de

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \varphi_{j;k} \leqslant 1,\ \ 1 \leqslant i,k \leqslant m,\ \ 1 \leqslant j \leqslant m+1$$

Scanned with OKEN Scanner

este un spaţiu metric complet cu distanţa $\rho(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta$, $p_i \in \bar{p}$, $\varphi_{i;j} \in \bar{q}$ fiecare aplicaţie $f_j : \Delta \to \Delta$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$ reprezentînd trecerea punctului $\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})$ în $\varphi_j(\bar{p}), \bar{\Psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))$, este mărginită şi avem pentru orice $\bar{p}', \bar{p}'' \in \Delta$

$$\rho\{f_j(\bar{p}'), f_j(\bar{p}'')\} \leqslant \|f\|_j \rho(\bar{p}'; \bar{p}'') \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1$$

astfel că

$$\|f\|_j < 1; \qquad j = j_0.$$
$$\|f\|_j \leqslant 1; \qquad j_0 \neq j.$$

3°. Funcţiile $\Psi_{i;j;k}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, m+1$ sînt continue în Δ şi verifică relaţiile

$$0 < \Psi_{i;j;k}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\} < 1$$

oricare ar fi

$$i, j, k = 1, 2, \ldots, m+1.$$

4°. Există un indice i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m+1$ astfel că

$$\lim_{n \to \infty} p_{i,j,\underbrace{i_0 i_0, \ldots, i_0}_{n \text{ ori}},k} = \tilde{p}_k$$

oricare ar fi indicii $i, j, k = 1, 2, \ldots m+1$, atunci lanţul considerat este ergodic, adică

$$\lim_{n \to \infty} P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})) = P_i, \; i = 1, 2, \ldots, m+1 \qquad \text{(III.3.17)}$$

Demonstraţie. Demonstraţia consistă în a arăta că şirul $P_i^{(n)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$ este compact şi că putem extrage din acest şir o infinitate de subşiruri convergente, care tind către aceeaşi limită, care este o constantă. În acest caz vom arăta în primul rînd egala continuitate a funcţiilor $P_i^{(n)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$ în raport cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

a. Egala continuitate a funcţiilor $P_i^{(n)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$

Elementele matricei $\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})$ se găsesc în domeniul Δ.

Presupunem că avem

$$|P_i^{(n)}\{\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')\} - P_i^{(n)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}| < M \rho\{\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\} \qquad \text{(III.3.18)}$$

pentru orice

$$\bar{p}, \bar{p}' \in \Delta, \; \bar{\varphi}(\bar{p}), \bar{\varphi}(\bar{p}') \in \Delta$$

pentru un $n > 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia funcţională (III.3.14) deducem

$$|P_i^{n+1}\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}')\} - P_i^{(n+1)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}| \leqslant \sum_{j=1}^{m+1} |p_j' - p_j| P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}'),$$

$$\overline{\Psi}_j(\overline{p}', \overline{\varphi}_j(\overline{p}'))\} + \sum_{j=1}^{m+1} p_j |P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}'), \overline{\Psi}_j(\overline{p}', \overline{\varphi}_j(\overline{p}'))\} - \quad \text{(III.3.19)}$$

$$- P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\Psi}_j(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})]\}|.$$

Putem găsi o constantă h, astfel încît:

$$\sum_{j=1}^{m+1} |\overline{p}_j' - \overline{p}_j| P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}'), \overline{\Psi}_j(\overline{p}', \overline{\varphi}_j(\overline{p}'))]\} \leqslant h\rho\{\overline{p}', \overline{\varphi}_j(\overline{p}'); \overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})\} \quad \text{(III.3.20)}$$

pe de altă parte:

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j |P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}'), \overline{\Psi}_j[\overline{p}'\overline{\varphi}_j(\overline{p}')] - P_i^{(n)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\Psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})]\}| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{j=1}^{m+1} p_j \rho[\overline{\varphi}_j(\overline{p}'), \overline{\Psi}_j[\overline{p}', \overline{\varphi}_j(\overline{p}')]; \overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\Psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})\} \leqslant$$

$$\leqslant M(1 - p_{j_0} + p_{j_0}\|f\|_{j_0})\rho\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}'); \overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}.$$

Din (III.3.19) rezultă

$$|P_i^{(n+1)}\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}')\} - P_i^{(n+1)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}| \leqslant [h + M(1 - p_{j_0} + p_{j_0}\|f\|_{j_0})] \cdot \rho\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}'); \overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\} \quad \text{(III.3.21)}$$

Este suficient să luăm

$$M > \frac{h}{p_{j_0}(1 - \|f\|_{j_0})} \quad \text{(III.3.22)}$$

pentru ca inegalitatea (III.3.18) să fie verificată şi pentru $n + 1$.

Cum membrul doi al acestei inegalităţi nu depinde de n, egala continuitate a funcţiilor $P_i^{(n)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ în raport cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$ este demonstrată.

b. Existenţa funcţiilor limită pentru şirul $P_i^{(n)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$

Din proprietatea de egală continuitate a funcţiilor $P_i^{(n)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ rezultă că mulţimea acestor funcţii este compactă. Putem deci extrage un subşir convergent $P_i^{(r_k)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ care tinde uniform către o limită continuă $P_i^{(r)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$. Considerăm numerele

$$\overline{P}_i^{(n)} = \sup_{\overline{p} \in \Delta} P_i^{(n)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}; \quad \underline{P}_i^{(n)} = \inf_{\overline{p} \in \Delta} P_i^{(n)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\} \quad \text{(III.2.23)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd cont de relaţia funcţională (III.3.14) se vede că şirul $\overline{P}_i^{(n)}$ este monoton descrescător, iar şirul $\underline{P}_i^{(n)}$ monoton crescător şi că

$$\overline{P}_i^{(n)} \leqslant \overline{P}_i^{(1)} < 1, \quad \underline{P}_i^{(n)} \geqslant \underline{P}_i^{(1)} \geqslant 0, \quad \overline{P}_i^{(n)} > \underline{P}_i^{(n)}.$$

Prin urmare cele două şiruri sînt convergente şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \overline{P}_i^{(n)} = \overline{P}_i, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{P}_i^{(n)} = \underline{P}_i, \quad 0 \leqslant \underline{P}_i \leqslant \overline{P}_i \leqslant 1 \qquad \text{(III.3.24)}$$

Considerînd relaţia

$$P_i^{(r_k+1)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\} = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(r_k)} \{\overline{\varphi}_j(\overline{p}) ; \overline{\Psi}_j(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})\} \qquad \text{(III.3.25)}$$

deoarece fiecare probabilitate din membrul drept tinde către o limită determinată, rezultă acelaşi lucru pentru membrul stîng.

Subşirul $P_i^{(r_k+1)}\{\overline{p},\overline{\varphi}(\overline{p})\}$ este deci de asemenea convergent şi tinde către o limită $P_i^{(r+1)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ satisfăcînd relaţia

$$P_i^{(r+1)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\} = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(r)}\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\Psi}_j(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p}))\} \qquad \text{(III.3.26)}$$

după cum se poate uşor demonstra.

Prin analogie se poate construi un şir $P_i^{(r_k+s)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ s fiind un întreg mai mare decît 1, de funcţii limită, continui în Δ şi care admit aceeaşi margine superioară $\overline{P}_i$ şi aceeaşi margine inferioară $\underline{P}_i$.

c. Unicitatea funcţiei limită

Ţinînd cont de (III.3.26), funcţia limită $P_i^{(r+s)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ se poate scrie sub forma

$$P_i^{(r+s)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\} =$$

$$= \sum_{\substack{j_l=1 \\ 1\leqslant l\leqslant s}}^{m+1} p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_1 \ldots j_s} P_i^{(r)} \{\overline{p_{j_1,\ldots,j_{s-1}}} ; \overline{\Psi}(\overline{p_{j_1,\ldots,j_{s-1}}}, \overline{p_{j_1,\ldots,j_s}})\} \qquad \text{(III.3.27)}$$

unde am notat

$$\overline{p_{j_1,\ldots,i_{s-1}}} = (p_{j_1,\ldots,j_{s-1},1}, \ldots, p_{j_1,\ldots,j_{s-1},m})$$

În plus avem

$$\sum_{j_l=1}^{m+1} p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2}, \ldots, p_{j_1,\ldots,j_s} = 1 ; \quad 1 \leqslant l \leqslant s. \qquad \text{(III.3.28)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm domeniul Δ_a definit de relaţiile

$$0 < a \leqslant p_j \leqslant 1 - a < 1; \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{III.3.29}$$

Admitem că pentru orice $p \in \Delta_a$ toate elementele matricei $\overline{\varphi}(\overline{p})$ şi $\overline{\Psi}_j(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p}))$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sînt cuprinse în Δ_a. Rezultă că pentru orice succesiune $j_1, j_2, \ldots, j_s$ avem

$$p_{j_1} p_{j_1 j_2}, \ldots, p_{j_1 j_2, \ldots, j_s} > 0.$$

Fie acum $\overline{p}' \in \Delta_a$ un punct în care $P_i^{(r+s)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})\}$ ia cea mai mare valoare. Notăm prin $p'_{j_1, \ldots, j_s}$ valoarea probabilităţii $p_{j_1, \ldots, j_s}$ în ipoteza că $\overline{p} = \overline{p}'$.

Rezultă din (III.3.27)

$$P_i^{(r+s)}\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}')\} = \\ = P_i^{(r)}\{\overline{p}'_{j_1, \ldots, j_{s-3}}, \overline{\Psi}_j(\overline{p}'_{j_1, \ldots, j_{s-3}}, \overline{p}'_{j_1, \ldots, j_{s-2}})\}. \tag{III.3.30}$$

Dacă $p'' \in \Delta_a$ reprezintă un punct unde $P_j^{(r+s)}\{\overline{p}, \overline{\varphi}(p)\}$ ia cea mai mică valoare, folosind o notaţie analogă, avem

$$P_i^{(r+s)}\{\overline{p}'', \overline{\varphi}(\overline{p}'')\} = \\ = P_i^{(r)}\{\overline{p}''_{j_1, \ldots, j_{s-3}}; \overline{\Psi}_j(\overline{p}''_{j_1, \ldots, j_{s-3}} \overline{p}''_{j_1, \ldots, j_{s-2}})\} \tag{III.3.31}$$

În relaţiile (III.3.30) şi (III.3.31) alegem toţi indicii egali cu i_0. Avem:

$$P_i^{(r+s)}\{\overline{p}', \overline{\varphi}(\overline{p}')\} = P_i^{(r)}\{\overline{p}'_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s-3}}; \\ \overline{\Psi}_j(\overline{p}'_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s-3}}, \overline{p}'_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s-2}})\} \tag{III.3.32}$$

$$P_i^{(r+s)}\{\overline{p}'', \overline{\varphi}(\overline{p}'')\} = P_i^{(r)}\{\overline{p}''_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s-3}}; \\ \overline{\Psi}_j(\overline{p}''_{\underbrace{i_0 \ldots, i_0}_{s-3}}, \overline{p}''_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s-2}})\} \tag{III.3.33}$$

Ştim că

$$\lim_{s \to \infty} p'_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s}} = \lim_{s \to \infty} p''_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s}} = \tilde{p}_l \tag{III.3.34}$$

Funcţiile $P_i^{(r+s)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$ fiind egal continue în raport cu $\bar{p}$ şi $\varepsilon < 0$ fiind arbitrar, există $\eta > 0$ astfel că

$$|P_i^{(r+s)}\{\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')\} - P_i^{(r+s)}\{\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')\}| < \varepsilon \qquad \text{(III.3.35)}$$

dacă

$$|p_j'' - p_j'| < \eta, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Pentru s suficient de mare, avem

$$|p''_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s}\, l} - p'_{\underbrace{i_0, \ldots, i_0}_{s}\, l}| < \eta, \quad 1 \leqslant l \leqslant m. \qquad \text{(III.3.36)}$$

şi deci

$$|P_i^{(r)}\{\bar{p}''_{j_1, \ldots, j_{s-1}}, \bar{\Psi}(\bar{p}''_{j_1, \ldots, j_{s-1}}, \bar{p}''_{j_1, \ldots, j_s})\} -$$
$$- P_i^{(r)}\{\bar{p}'_{j_1, \ldots, j_s}, \bar{\Psi}(\bar{p}'_{j_1, \ldots, j_{s-1}}, \bar{p}_{j_1 \ldots j_s})\}| < \varepsilon$$

Ţinînd cont de (III.3.32), (III.3.33), rezultă

$$|P_i^{(r+s)}\{\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')\} - P_i^{(r+s)}\{\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')\}| < \varepsilon, \ (1 \leqslant i \leqslant m) \qquad \text{(III.3.37)}$$

Fie acum $\overline{P}_i(a)$ şi $\underline{P}_i(a)$ marginea superioară, respectiv inferioară a funcţiei $P_i^{(r+s)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$ în Δ_a.

În acest caz rezultă

$$\overline{P}_i(a) = P_i^{(r+s)}\{\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')\}, \quad \underline{P}_i(a) = P_i^{(r+s)}\{\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')\} \qquad \text{(III.3.38)}$$
$$\overline{P}_i(a) - \underline{P}_i(a) < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar. Astfel avem: $\overline{P}_i(a) = \underline{P}_i(a)$ ceea ce implică faptul că $P_i^{(r)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$ se reduc la o constantă P_i în Δ_a. Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic, această concluzie rămîne de asemenea valabilă în Δ.

Astfel am demonstrat că

$$\lim_{n \to \infty} P_i^{(n)}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\} = P_i, \ (1 \leqslant i \leqslant m) \qquad \text{(III.3.39)}$$

Limita P_i nu depinde de $\bar{p}$. Rămîne de arătat că această limită este aceeaşi oricare ar fi natura funcţiilor $\bar{\varphi}(\bar{p})$.

Scriind ecuaţia de recurenţă într-un punct determinat $\bar{p} = \bar{p}'''$

$$P_i^{(n+1)}\{\bar{p}''', \bar{\varphi}(\bar{p}''')\} = \sum_{j=1}^{m+1} p_j''' P_i^{(n)}(\{\bar{\varphi}_j(\bar{p}''')\}, \Psi_j\{\bar{p}''', \bar{\varphi}_j(\bar{p}''')\}) \qquad \text{(III.3.40)}$$

Scanned with OKEN Scanner

În condițiile teoremei, pe baza relației (III.3.39), avem

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(\{\overline{\varphi}_j(\overline{p}''')\}, \overline{\Psi}_j\{\overline{p}''', \overline{\varphi}_j(\overline{p}''')\}) = R_i$$

unde R_i este o constantă, care nu depinde de valoarea funcțiilor $\overline{\varphi}_j(\overline{p}''')$; $0 \leqslant j \leqslant m$. Rezultă că și membrul al doilea al relației tinde către o limită care nu depinde de valoarea funcțiilor $\overline{\varphi}_j(\overline{p})$ în punctul $\overline{p} = \overline{p}'''$. Întrucît din relația (III.3.39) rezultă că această limită nu depinde nici de $\overline{p}'''$, teorema este demonstrată.

Cazul liniar

Vom aplica rezultatele generale obținute în cazul în care funcțiile $\varphi_{j;i;k}$ sînt liniare în raport cu argumentele lor.

Pentru simplificare, vom considera cazul $m = 1$.

Lanțul poate deci lua numai valorile a_1, a_2. Lanțul este definit prin condițiile următoare:

a′ $\mathbf{P}(X_1 = a_1) = p$

b′ $\mathbf{P}(X_2 = a_1|X_1 = a_1) = \varphi_1(p)$, $\mathbf{P}(X_2 = a_1|X_1 = a_2) = \varphi_2(p)$

c′ $\mathbf{P}(X_3 = a_1|X_2 = a_1,\ X_1 = a_1) = a_{11} + b_{11}p + c_{11}\varphi_1(p)$

$\mathbf{P}(X_3 = a_1|X_2 = a_2,\ X_1 = a_1) = a_{10} + b_{10}p + c_{10}\varphi_1(p)$

$\mathbf{P}(X_3 = a_1|X_2 = a_1,\ X_1 = a_2) = a_{01} + b_{01}p + c_{01}\varphi_2(p)$

$\mathbf{P}(X_3 = a_1|X_2 = a_2,\ X_1 = a_2) = a_{00} + b_{00}p + c_{00}\varphi_2(p)$

unde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sînt constante date.

d′. Pentru $n > 4$ avem:

$$p_{j_1\dots j_{n,1}} = a_{j_{n-1}j_n} + b_{j_{n-1}j_n} p_{j_1\dots j_{n-2,1}} + c_{j_{n-1},j_n} p_{j_1\dots j_{n-1,1}} \qquad \text{(III.3.41)}$$

pentru orice

$$j_1, \dots, j_n = 0,1$$

Notăm prin $Q_{j_{n-1};\, j_n}$ operatorul liniar definit de (III.3.41), aplicat celor două probabilități consecutive din șirul de probabilități $p_{j_1\dots j_n}$.

Să vedem, în conformitate cu condițiile din teorema I, în ce caz principiul ergodic este aplicabil.

În primul rînd condiția 3^0 ne arată că pentru orice $0 \leqslant q \leqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, avem

$$0 < a_{ij} + b_{ij}q + c_{ij}r < 1; \qquad i, j = 0,1.$$

ceea ce implică

$$0 < a_{ij} < 1;\ 0 < a_{ij} + b_{ij} < 1;\ 0 < a_{ij} + c_{ij} < 1;\ 0 < a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} < 1. \qquad \text{(III.3.42)}$$

Domeniul Δ este de data aceasta inclus în R^3. Pentru $\bar{p},\bar{q} \in \Delta$ alegem distanța

$$\rho(\bar{p},\bar{q}) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|.$$

Condiția 2^0 este deci satisfăcută dacă

$$\begin{aligned} |b_{11} + b_{10}| &\leqslant k_1 \\ |c_{01} + c_{00}| &\leqslant k_2 \end{aligned} \qquad \text{(III.3.43)}$$

unde k_1 și k_2 sînt numere pozitive mai mici sau egale cu 1, iar unul dintre ele este strict mai mic decît 1, și dacă în plus funcțiile $\varphi_1(\bar{p})$, $\varphi_2(\bar{p})$ admit derivate de primul ordin în raport cu p, mărginite în intervalul $0 \leqslant p \leqslant 1$, respectiv de numerele:

$$\frac{k_1 - |b_{11}| - |b_{10}|}{1 - k_1 + |c_{11}| + |c_{10}|}, \quad \frac{k_2 - |c_{01}| - |c_{00}|}{1 - k_2 + |b_{01}| + |b_{00}|} \qquad \text{(III.3.44)}$$

În sfîrșit, condiția 4^0 se reduce la aceea pentru care un lanț $\{u_n\}$ $\{v_n\}$ definit de relațiile

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_{11} + b_{11}u_n + c_{11}u_{n+1} \\ v_{n+2} &= a_{00} + b_{00}v_n + c_{00}v_{n+1} \end{aligned}$$

să fie convergent.

Este necesar ca rădăcinile ecuațiilor

$$\begin{aligned} x^2 - c_{11}x - b_{11} &= 0 \\ x^2 - c_{00}x - b_{00} &= 0 \end{aligned}$$

să fie mai mici decît 1, ceea ce implică condițiile

$$\begin{aligned} b_{11} + c_{11} &< 1 & \qquad b_{00} + c_{00} &< 1 \\ b_{11} - c_{11} &< 1 & \qquad b_{00} - c_{00} &< 1 \end{aligned}$$

care sînt consecințe ale relațiilor (III.3.42).

Condiția 4^0 este verificată dacă condiția 2^0 este verificată.

Principiul ergodic este prin urmare valabil dacă sînt satisfăcute relațiile exprimate de (III.3.42), (III.3.43), (III.3.44).

Modul de convergență al probabilității totale

Definiția 5. Numim *probabilitate totală*, probabilitatea egalității $X_n = a_i$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

S-a demonstrat că în condițiile teoremei ergodice avem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = a_i) = P_i \qquad \text{(III.3.45)}$$

oricare ar fi probabilitățile corespunzătoare variabilelor inițiale X_1, X_2.

Scanned with OKEN Scanner

Facem acum un pas şi mai departe, demonstrînd

Teorema II. Există două constante pozitive M şi h astfel încît

$$|\mathbf{P}(X_n = a_i) - P_i| < \frac{M}{(1+h)^n}. \qquad \text{(III.3.46)}$$

Demonstraţie. Considerăm un spaţiu vectorial complex E şi B un subspaţiu al lui E. Presupunem că E este un spaţiu Banach în raport cu o normă $||x||$ $x \in E$ şi B un spaţiu Banach în raport cu o normă $||x||_1$ definită pe B. Mai presupunem că este îndeplinită condiţia

$$x_n \in B, \quad ||x_n|| < N; \quad n = 1, 2, \ldots, \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$$

implică $x \in B$ şi $||x||_1 < N$.

Să notăm prin $\mathcal{C}(B,E)$ mulţimea operatorilor liniari T din spaţiul B care satisfac condiţiile:

1°. Există o constantă pozitivă H, astfel încît pentru $n = 1, 2, 3,\ldots$ avem

$$||T^n|| \leqslant H.$$

2°. Există două constante R, r $(0 < r < 1)$ astfel încît

$$||Tx|| \leqslant r||x|| + R||x||_1$$

oricare ar fi $x \in B$.

3°. Pentru orice parte $P \subset B$, mărginită în B, $T(P)$ este relativ compactă în E.

Relaţia (III.3.46) rezultă din aplicarea unei teoreme a lui G. Marinescu şi C. T. Ionescu-Tulcea referitoare la mulţimea de operatori $\mathcal{C}(B, E)$:

Fie T un operator aparţinînd mulţimii $\mathcal{C}(B, E)$. Operatorul T are întotdeauna un număr finit de valori proprii de modul 1, $c_1, c_2, \ldots, c_p$ şi avem

$$T^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i^n} T_i + S_n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

unde $T_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ sînt operatori avînd ca domeniu spaţiul B şi contra domeniu o parte lineară a lui B, de dimensiune finită, li-

niari și mărginiți, și S_n un operator avînd ca domeniu spațiul B și contradomeniul conținut în B, liniar și mărginit, astfel încît

$$T_i^2 = T_i,\ T_iT_j = 0\,;\quad i \neq j,\quad T_iS = ST_i = 0$$

$$||S_n|| < \frac{M}{(1+h)^n}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

M și h fiind două constante pozitive.

Pentru aplicarea acestei teoreme, va fi necesar să demonstrăm mai întîi că

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')) - P_i^{(n)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}''))| < M\,\rho(\bar{p}', \bar{p}'') \qquad \text{(III.3.47)}$$

unde $\rho(\bar{p}', \bar{p}'')$ este metrica

$$\rho(\bar{p}', \bar{p}'') = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (p_j' - p_j'')^2}$$

în spațiul euclidian al punctelor $\bar{p} = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m)$

Introducem matricele

$$\bar{q} = \{q_1,\ \ldots,\ q_m\}$$

$$\bar{r}_j = \{r_{j1},\ \ldots,\ r_{jm}\}$$

$$r = \{\bar{r}_1,\ \ldots,\ \bar{r}_{m+1}\}$$

și aplicăm succesiv operatorul

$$Vf(\bar{q}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^{m+1} q_j f(\bar{r}_j, \Psi_j(\bar{q}, r_j)) \qquad \text{(III.3.48)}$$

pornind de la

$$f^{(1)}(\bar{q}, \bar{r}) = p_i$$

în ipoteză că

$$q_i > 0,\quad r_{jk} > 0,\quad \sum_{h=1}^{m} q_h < 1$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} r_{jk} < 1\ \ (i,\ k = 1,\ \ldots,\ m),\ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots\ m+1)$$

Scanned with OKEN Scanner

În spațiul euclidian $R^{m(m+2)}$ al valorilor $\bar{q}$, $\bar{r}$ să introducem distanța euclidiană $\rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}'')$ $\bar{q}',\bar{r}' \in R^{m(m+2)}$, $\bar{q}'',\bar{r}'' \in R^{m(m+2)}$. Notînd prin $f_i^{(n)}(\bar{q},\bar{r})$, iterata de rangul n obținută prin aplicarea succesivă a operatorului (III.3.48) funcției $f_i^{(1)}(\bar{q},\bar{r}) = p_i$ ne propunem să arătăm că există un număr N, astfel încît:

$$|f_i^{(n)}(\bar{q}',\bar{r}') - f_i^{(n)}(\bar{q}'',\bar{r}'')| < N\rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}''). \tag{III.3.49}$$

Vom presupune această inegalitate adevărată pînă la n și vom proceda prin inducție.

Avem

$$|f_i^{(n+1)}(\bar{q}',\bar{r}') - f_i^{(n+1)}(\bar{q}'',\bar{r}'')| \leqslant \sum_{j=1}^{m+1} |q_j' - q_j''| f_i^{(n)}(\bar{r}_j', \overline{\Psi}_j(\bar{q}',\bar{r}_j') + \tag{III.3.50}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} q_j'' |f_i^{(n)}(\bar{r}_j', \overline{\Psi}_j(\bar{q}',\bar{r}_j') - f_i^{(n)}(\bar{r}_j'', \Psi_j(\bar{q}'',\bar{r}_j'')).$$

Însă

$$\sum_{j=1}^{m+1} |q_j' - q_j''| f_i^{(n)}(\bar{r}_j', \Psi_j(\bar{q}',\bar{r}_j')) < \sum_{j=1}^{m+1} |q_j' - q_j''| < 2m(m+2)\rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}'') \tag{III.3.51}$$

deoarece

$$f_i^{(n)}[\bar{r}_j, \Psi_j(\bar{q}',\bar{r}_j')] < 1.$$

Ținînd seamă de (III.3.49) rezultă mai departe

$$\sum_{j=1}^{m+1} q_j'' |f_i^{(n)}[\bar{r}_j', \Psi_j(\bar{q}',\bar{r}_j')] - f_i^{(n)}[\bar{r}_j'', \overline{\Psi}_j(\bar{q}'',\bar{r}_j'')]| <$$

$$< N\rho(\bar{r}_j', \overline{\Psi}_j(\bar{q}',\bar{r}_j'); \bar{r}_j'', \overline{\Psi}_j(\bar{q}'',\bar{r}_j'')). \tag{III.3.52}$$

Știm însă că

$$\rho(\bar{r}_j, \overline{\Psi}_j(\bar{q}',\bar{r}_j'); \bar{r}_j'', \Psi_j(\bar{q}'',\bar{r}_j'')) < ||f_j||\rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}'') \tag{III.3.53}$$

și că

$$||f_j|| < 1; \quad j = j_0$$
$$||f_j|| \leqslant 1; \quad j \neq j_0.$$

Din (III.3.52) și din (III.3.53) rezultă

$$\sum_{j=1}^{m+1} q_j'' [f_i^{(n)}(\bar{r}_j', \overline{\Psi}_j(\bar{q}',\bar{r}_j') - f_i^{(n)}(\bar{r}_j'', \overline{\Psi}_j(\bar{q}'',\bar{r}_j'')| <$$

$$< N \sum_{j=1}^{m+1} q_j'' ||f_j|| \rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}'') \leqslant N(1 - q_{j_0}'' + q_{j_0}''||f_{j_0}||) \cdot \tag{III.3.54}$$

$$\cdot \rho(\bar{q}',\bar{r}';\bar{q}'',\bar{r}'').$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (III.3.51) și din (III.3.54), obținem

$$|f_i^{(n+1)}(\bar{q}', \bar{r}') - f_i^{(n+1)}(\bar{q}'', \bar{r}'')| < [2m(m+2) + N(1 - q''_{j_0} + q''_{j_0}\|f_{j_0}\|)]\rho(\bar{q}', \bar{r}'; \bar{q}'', \bar{r}'')$$

Dacă luăm

$$N > \frac{2m(m+2)}{q''_{j_0}(1 - \|f_{j_0}\|)}$$

rezultă că avem

$$|f_i^{(n+1)}(\bar{q}', \bar{r}') - f_i^{(n+1)}(\bar{q}'', \bar{r}'')| < N\rho(\bar{q}', \bar{r}'; \bar{q}'', \bar{r}'').$$

Deoarece pentru $n = 1$, inegalitatea (III.3.49) este evidentă, rezultă, din relația precedentă, că inegalitatea este adevărată pentru orice n.

Dacă luăm

$$\bar{q} = \bar{p}, \qquad \bar{r} = \bar{\varphi}(\bar{p}),$$

inegalitatea (III.3.49) devine

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')) - P_i^{(n)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}''))| < N\rho(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}''))$$

Deoarece funcțiile $\bar{\varphi}(\bar{p})$ admit derivate parțiale de primul ordin în raport cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$, continue și mărginite în Δ, putem scrie

$$\rho(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')) < K\rho(\bar{p}', \bar{p}'')$$

și în consecință

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')) - P_i^{(n)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}''))| < M\rho(\bar{p}', \bar{p}'').$$

Să identificăm spațiul E cu spațiul funcțiilor continue definite pe R^m și spațiul B cu spațiul funcțiilor continue $\mathrm{CL}(R^m)$ pentru care

$$\frac{|f(c') - f(c'')|}{\rho(c', c'')} \leqslant M < \infty, \qquad f(c'), f(c'') < \mathrm{CL}(R^m)$$

$$m(f) = \sup \frac{|f(c') - f(c'')|}{\rho(c', c'')}, \qquad c', c'' \in R^m,$$

norma spațiului B fiind

$$\|\varphi\|_1 = m(\varphi) + \|\varphi\|.$$

Din (III.3.47) deducem că

$$P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})) \in \mathrm{CL}(R^m)$$

și că operatorul V aparține spațiului $\mathcal{C}(B, E)$.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate uşor verifica faptul că sînt îndeplinite condiţiile teoremei lui G. Marinescu şi C. T. Ionescu-Tulcea. Deci, putem scrie:

$$V^n p_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^n V_j p_i + S_n p_i ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

unde

$$V_j^2 = V_j, \quad V_j V_k = 0, \quad (j \neq k), \quad V_j S_n = S_n V_j = 0,$$

$$\|S_n\| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n} ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$|\lambda_j| = 1 ; \qquad j = 1, 2, \ldots p$$

Deoarece

$$V^n p_i = P_i^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})),$$

putem să scriem

$$P_i^{(n)}(\overline{p} ; \overline{\varphi}(\overline{p})) = \sum_{j=1}^{p} H_j(\overline{p}_i)\ \lambda_j^n + K_n(p_i) \qquad \text{(III.3.55)}$$

unde am notat

$$H_j(p_i) = V_j p_i, \qquad K_n(p_i) = S_n p_i.$$

Prin urmare, în virtutea teoremei citate, avem

$$|K_n(p_i)| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}. \qquad \text{(III.3.56)}$$

Am demonstrat însă în teorema 1 că

$$\lim P_i^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})) = P_i.$$

Întrucît

$$\lim_{n \to \infty} K_n(p_i) = 0$$

deducem

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{p} H_j(p_i)\ \lambda_j^n = P_i. \qquad \text{(III.3.57)}$$

Această proprietate de limită nu poate avea loc decît dacă

$$\sum_{j=1}^{p} H_j(p_i) \lambda_j^n = P_i$$

Scanned with OKEN Scanner

după cum se poate uşor arăta, ţinînd seamă de faptul că expresia λ^n, $|\lambda| = 1$ nu admite o limită, pentru $n \to \infty$, decît dacă $\lambda = 1$.

Obţinem astfel din (III.3.55)

$$P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})) = P_i + K_n(p_i)$$

Din (III.3.56), rezultă

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})) - P_i| < \frac{M}{(1+h)^n}$$

adică ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

Calculul valorii limită P_i prin metoda Monte Carlo

După cum vom vedea, în anumite probleme de programare stochastică ne interesează să găsim valoarea exactă a probabilităţii P_i. Pînă în prezent nu a fost dată o metodă generală de calcul a acestei valori decît folosind metoda Monte Carlo.

Însemnăm prin

$$Y_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j, \qquad \text{(III.3.58)}$$

unde Y_n este variabila aleatoare definită prin valorile luate de probabilităţile egalităţii $X_n = a_i$, după ce cunoaştem valorile luate de variabilele precedente $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Se poate demonstra

Teorema III. Pentru orice lanţ $\mathcal{L}$ avem:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}(Y_{(n)}) = P_i$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{D}^2(Y_{(n)}) = 0.$$

Demonstraţie. Din însăşi modul de calcul al mediei lui Y_n reiese că

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{P}(X_n = a_i)$$

Sau

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}(Y_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n = a_i) = P_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece, după o cunoscută teoremă a lui Cesaro

$$\lim_{n\to\infty}(Y_{(n)}) = \lim_{n\to\infty}(Y_n),$$

prima parte a teoremei III este demonstrată.

Mai departe, putem scrie

$$\mathbf{E}(Y_{(n)}^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n}\mathbf{E}(Y_h^2) + \\ + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{n-1}\mathbf{E}(Y_hY_{h+1} + Y_hY_{h+2} + \ldots + Y_hY_n), \tag{III.3.59}$$

Din inegalitatea (III.3.46) rezultă că

$$P_i - u_h \leqslant \mathbf{E}(y_h) \leqslant P_i + u_h \tag{III.3.60}$$

unde u_h este mai mic decît termenul corespunzător al unei progresii geometrice cu raţia mai mică decît 1.

Introducem notaţia mai simplă

$$p_{j_1j_2\ldots j_{h-1}i\,|\,j_{h+1}\ldots j_{k-1}i} = \mathbf{P}(X_k = a_i,\ X_{k-1} = a_{j_{k-1}},\ \ldots X_{h+1} = \\ = a_{j_{h+1}}|X_h = a_i,\ X_{h-1} = a_{j_{h-1}},\ \ldots\ X_1 = a_{j_1})$$

Cu această notaţie, vom scrie

$$\mathbf{E}(Y_hY_k) = \sum_{k>h}\ \sum_{j_1\ldots j_{h-1}} p_{j_1\ldots j_{h-1}i} \sum_{j_{h+1},\ldots j_{k-1}} P_{j_1\ldots j_{h-1}i\,|\,j_{h+1},\ldots j_{k-1},i}.$$

Din (III.3.60) obţinem:

$$\sum_{j_1\ldots j_{h-1}} p_{j_1\ldots j_{h-1}i} \leqslant P_i + u_h$$

$$\sum_{j_{h+1}\ldots j_k} p_{j_1\ldots j_{h-1}i\,|\,j_{h+1}\ldots j_{k-1}i} \leqslant P_i + u_{k-h}$$

şi, prin urmare,

$$\mathbf{E}(Y_hY_k) \leqslant P_i^2 + (u_h + u_{k-h})P_i + u_hu_{k-h},\ (h > k)$$

$$\sum_{k=h+1}^{n}\mathbf{E}(Y_hY_k) \leqslant (n-h)P_i^2 + [(n-h)u_h + A]P_i + Au_h,$$

unde prin A am notat suma seriei convergente cu termenul general u_{k-h}. Rezultă

$$2\sum_{h=1}^{n-1}\sum_{k=h+1}^{n}\mathbf{E}(Y_hY_k) \leqslant n^2P_i^2 + 4nAP_i + A^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte

$$\sum_{h=1}^{n} \mathbf{E}(Y_n^2) \leqslant \sum_{h=1}^{n} \mathbf{E}(Y_h) \leqslant nP_i + A.$$

Prin urmare, (III.3.60) implică

$$\mathbf{E}(Y_{(n)}^2) \leqslant P_i^2 + \frac{4A}{n} P_i + \frac{A(A+1)}{n^2}. \qquad \text{(III.3.61)}$$

În mod analog se demonstrează că

$$[\mathbf{E}(Y_{(n)})]^2 \geqslant P_i^2 - \frac{2A}{n} P_i + \frac{A^2}{n^2} \qquad \text{(III.3.62)}$$

Din (III.3.61) şi (III.3.62) obţinem

$$\mathbf{E}(Y_{(n)}^2) - [\mathbf{E}(Y_{(n)})]^2 \leqslant \frac{6A}{n} P_i + \frac{A}{n^2}$$

Deci şi a doua parte a teoremei este demonstrată. Prin urmare, putem calcula $\lim_{n\to\infty} M(y_{(n)})$ utilizînd pentru succesiunea $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$ o diagramă de numere aleatoare, prin metoda Monte Carlo. Vom arăta efectiv cum se aplică metoda, cînd vom considera programările stochastice, în care intervin procesele cu legături complete.

Teorema limită centrală

Ne propunem să demonstrăm

Teorema IV: Fie X_n, $n = 1, 2, \ldots$, variabilele succesive ale unui lanţ $\mathcal{L}$.

Dacă:

$$(\overline{V}) \lim \frac{1}{n} D^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = K \qquad 0 < K < \infty, \qquad \text{(III.3.63)}$$

variabila

$$X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

convenabil normată tinde la limită către legea normală.

Demonstraţie. θ fiind o constantă a cărei valoare este deocamdată nedeterminată să însemnăm

$$f^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p}); t, \theta) = \mathbf{E}(e^{it(X_1 + \ldots + X_n - n\theta)}) \qquad \text{(III.3.64)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia caracteristică $f^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta)$ verifică ecuaţia funcţională

$$f^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j e^{it(a_j-\theta)}\, f^{(n-1)}(\overline{\varphi}_j(\overline{p}),\ \overline{\Psi}_j(\overline{p},\ \overline{\varphi}_j(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta). \quad \text{(III.3.65)}$$

Se vede că funcţiile caracteristice se obţin succesiv prin aplicarea operatorului

$$Vf(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j e^{it(a_j-\theta)}\, f[\overline{\varphi}_j(\overline{p}),\ \overline{\Psi}_j(\overline{p},\ \overline{\varphi}_j(\overline{p}))\ ;\ t,\ \theta]$$

În particular

$$f^{(1)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j e^{it(a_j-\theta)}.$$

Să însemnăm prin $CL(R^m)$ spaţiul funcţiilor complexe, definite pe R^m, pentru care

$$\frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c',\ c'')} \leqslant M < \infty,$$

$c',\ c'' \in R^m,\ c' \neq c'',\ \rho(c',\ c'')$ fiind distanţa euclidiană în R^m.

Vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă: Pentru orice lanţ $\mathcal{L}$

$$f^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) \in CL(R^m)\ ; \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Folosind aceleaşi notaţii ca în relaţia (III.3.48), vom considera operatorul

$$Vf(\overline{q},\ \overline{r}\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} q_j e^{it(a_j-\theta)} f(\overline{r}_j,\ \overline{\Psi}_j\ (\overline{q},\ \overline{r}_j)), \qquad \text{(III.3.66)}$$

pornind de la

$$f^{(1)}(\overline{q},\ \overline{r}\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} q_j e^{it(a_j-\theta)}. \qquad \text{(III.3.67)}$$

Se poate arăta că există un număr $M > 0$ asfel încît

$$|f^{(n)}(\overline{q}',\ \overline{r}'\ ;\ t,\ \theta) - f^{(n)}(\overline{q}'',\ \overline{r}''\ ;\ t,\ \theta)| < M\,\rho(\overline{q}',\ \overline{r}';\ \overline{q}'',\ \overline{r}'') \quad \text{(III.3.68)}$$

Procedînd tot prin inducţie, în acelaşi mod ca la demonstrarea inegalităţii (III.3.49), se vede că dacă alegem

$$M > \frac{2m(m+2)}{q''_{j_0}(1 - \|f_{j_0}\|)}$$

inegalitatea (III.3.68) este satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem

$$\bar{q} = \bar{p}, \quad \bar{r} = \bar{\varphi}(\bar{p}),$$

inegalitatea (III.3.62) devine

$$|f^{(n)}(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}') ; t, \theta) - f^{(n)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'') ; t, \theta)| < M \rho[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}') ; \bar{p}'' \bar{\varphi}(\bar{p}'')]$$

Întrucît funcţiile $\bar{\varphi}(\bar{p})$ admit derivate parţiale continue şi mărginite de primul ordin în Δ, în raport cu $p_1, \ldots, p_m$,

$$\rho(\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}') ; \bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')) < K \rho(\bar{p}', \bar{p}''),$$

unde K este o constantă convenabil aleasă. Rezultă $|f^{(n)}(p', \bar{\varphi}(\bar{p}') ; t, \theta) - f^{(n)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'') ; t, \theta)| < KM \rho(\bar{p}', \bar{p}'')$ şi lema este demonstrată. Referindu-ne la teorema lui G. Marinescu şi C.T. Ionescu-Tulcea, citată anterior, vom considera spaţiul $C(R^m)$ drept spaţiul E, spaţiul B drept spaţiul $CL(R^m)$ şi operatorul V

$$VF(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j F(\bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\Psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})) ; t, \theta).$$

Se poate arăta că V îndeplineşte cele patru condiţii din teorema citată pentru a aparţine clasei de operatori $\mathcal{C}(B, E)$.

Prin urmare, putem scrie

$$f^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta) = \sum_{i=1}^{K} \mu_i^n(t, \theta) f_i^{(1)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta) + g_n(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta) \tag{III.3.69}$$

unde

$$|\mu_i^n(t, \theta)| = 1, \quad i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k$$

şi $f_i^{(1)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta)$, $g_n(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta)$ sînt funcţii determinate astfel că

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta) = 0 ;$$

$f^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; t, \theta)$ fiind o funcţie caracteristică pentru $t = 0$ ia valoarea 1.

Prin urmare,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i^n(0, \theta) f_i^{(1)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; 0, \theta) + g_n(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}) ; 0, \theta) = 1. \tag{III.3.70}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (III.3.70) rezultă mai multe consecinţe decurgînd din observaţia că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_i^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{\mu_i-\mu_i^{n+1}}{1+\mu_i}=0,$$

dacă

$$|\mu_i|=1\,;\ \mu_i\neq 1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_1+\ldots+g_n}{n}=0.$$

Prima consecinţă este existenţa unei valori $\mu_i(0,\theta)=1$ care, putem să admitem, este $\mu_1(0,\theta)$. Într-adevăr, în caz contrar am aduna membru cu membru egalităţile (III.3.70) pentru valorile $1, 2, \ldots, n$, am împărţi prin n şi trecînd la limită, primul membru ar tinde către zero, iar al doilea către 1.

În acest caz, acelaşi proces de trecere la limită ne conduce la relaţia

$$f_i^{(1)}(\overline{p},\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,0,\,\theta)=1.$$

Egalitatea (III.3.69) se transformă în

$$\sum_{i=2}^{k}\mu_i^n(0,\theta)f_i^{(1)}(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,0,\,\theta)+g_n(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,0,\,\theta)=0 \qquad \text{(III.3.71)}$$

ceea ce implică

$$f_i^{(1)}(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,0,\,\theta)=0,\qquad i=2,\,3,\,\ldots\,k$$
$$g_n(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,0,\,\theta)=0.$$

Dacă în relaţia (III.3.69) vom pune $\frac{t}{\sqrt{n}}$ în locul lui t, obţinem

$$f^{(n)}(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,\frac{t}{\sqrt{n}},\,\theta)=\sum_{i=1}^{k}\mu_i^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\,;\,\theta\right)f_i^{(1)}\left(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\,\frac{t}{\sqrt{n}},\,\theta\right)+$$

$$+g_n\left(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\frac{t}{\sqrt{n}},\,\theta\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}\left(\overline{p},\,\overline{\varphi}(\overline{p})\,;\frac{t}{\sqrt{n}},\,\theta\right)=\lim\mu_1^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}},\,\theta\right). \qquad \text{(III.3.72)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţiile caracteristice $f^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p}) ; t, \theta)$ sînt de forma

$$f^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p}) ; t, \theta) = \sum_{j_1 \cdots j_n} \Phi_{j_1 \cdots j_n}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})) e^{it(X_1 + \ldots + X_n - n\theta)}$$

Aceste funcţii sînt deci continue şi admit derivate continue în raport cu t, pentru orice ordin finit. Aceeaşi proprietate este valabilă şi pentru $\mu_1(t,\theta)$, cu excepţia poate a unei mulţimi de măsură nulă.

Vom alege $\theta = \theta_0$, astfel încît

$$\left(\frac{\partial \mu_1(t, \theta_0)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

ceea ce este întotdeauna posibil, deoarece revine la anularea momentului de primul ordin.

Ipoteza (III.3.63) din teorema IV ne arată mai departe că

$$\left(\frac{\partial^2 \mu_1(t, \theta_0)}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \lambda \neq 0.$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}\left(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p}) ; \frac{t}{\sqrt{n}}, \theta_0\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_1^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \theta_0\right) =$$

$$= \lim\left[1 - \frac{t^2}{n}\left(\frac{\partial^2 \mu(t, \theta_0)}{\partial t^2}\right)_{t=0} + 0(n^{-3/2})\right] = e^{-\frac{t^2}{2}\lambda}$$

Funcţia caracteristică a variabilei

$$\frac{X_{(n)} - E(X_n)}{\sqrt{n}}$$

tinde uniform, pentru $n \to \infty$, către funcţia caracteristică a distribuţiei normale. Teorema este deci demonstrată.

Un alt mod de calcul al valorii limită

Fie X_n $(n=1, 2, \ldots,)$ un şir de variabile aparţinînd unui lanţ $\mathcal{L}$. În grupul de variabile $X_1, X_2, \ldots, X_n$, însemnăm prin n_i ; $(i = 1, 2, \ldots m + 1)$ numărul care arată de cîte ori s-a realizat variabila a_i. Se poate enunţa

Teorema V. Pentru orice lanţ $\mathcal{L}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\frac{n_i}{n}\right) = P_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\left(\frac{n_i}{n}\right) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin definiție

$$\frac{1}{n}\,\mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i\,\mathbf{E}\left(\frac{n_i}{n}\right) \qquad \text{(III.3.73)}$$

$$\frac{1}{n}\,\mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} P_i^{(s)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})). \qquad \text{(III.3.74)}$$

Din compararea relațiilor (III.3.73), (III.3.74), care sînt adevărate oricare ar fi valorile a_i; $i = 1, 2, \ldots, m+1$ reiese

$$\mathbf{E}\left(\frac{n_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} P_i^{(s)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})). \qquad \text{(III.3.75)}$$

Însă, am demonstrat că

$$\lim_{n\to\infty} P_i^n(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})) = P_i.$$

Din (III.3.75) rezultă atunci, trecînd la limită

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\frac{n_i}{n}\right) = P_i.$$

Avem

$$\mathbf{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{n}\right) a_i\right) \qquad \text{(III.3.76)}$$

Deoarece am demonstrat în paragraful precedent că variabila

$$X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

convenabil normată este normală, reiese că

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0.$$

Din (III.3.76) deducem astfel

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{n}\right) a_i\right) = 0$$

Această relație trebuind să aibe loc oricare ar fi valorile a_i; $i = 1, 2, \ldots, m+1$, alegem $a_i = 1$ și $a_s = 0$, pentru $s \neq i$.

Rezultă

$$\lim_{n\to 0} \mathbf{D}^2\left(\frac{n_i}{n}\right) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema este deci demonstrată. În baza acestei teoreme rezultă că $\frac{n_i}{n}$ este o funcție de estimație absolut corectă a lui P_i. Pentru valorile mari ale lui n, funcția $\frac{n_i}{n}$ estimează valoarea lui P_i.

Alte proprietăți de limită

Să notăm

$$P_{ij}^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})) = \mathbf{P}[X_n = a_i;\ X_{n+1} = a_j] \qquad \text{(III.3.77)}$$

Putem enunța

Teorema VI. Pentru orice lanț $\mathcal{L}$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})) = P_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, m+1$$

oricare ar fi probabilitățile inițiale.

Demonstrația decurge în același mod ca și pentru teorema I, pornind de la relația de recurență

$$P_{ij}^{(n+1)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] = \sum_{s=1}^{m+1} p_s P_{ij}^{(n)}[\overline{\varphi}_j(\overline{p});\ \Psi_j(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})] \qquad \text{(III.3.78)}$$

Putem determina și natura convergenței mai sus semnalate, arătînd că

$$|P_{ij}^{(n)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] - P_{ij}| < \frac{M}{(1+h)^n}, \qquad \text{(III.3.79)}$$

unde M și h sînt două constante pozitive.

Demonstrația nu diferă esențial de aceea dată pentru probabilitatea corespunzătoare unei singure stări A_i.

Însemnăm prin Z_n variabila aleatoare definită prin valorile luate de probabilitățile evenimentului $(X_n = a_i) \cap (X_{n+1} = a_j)$, după ce cunoaștem valorile luate de variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Fie

$$Z_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Se demonstrează în același mod ca în teorema III, că

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Z_{(n)}) = P_{ij} \qquad \text{(III.3.80)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2(Z_{(n)}) = 0 \qquad \text{(III.3.81)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste relații ne dau posibilitatea că calculăm valorile P_{ij} prin metoda Monte Carlo.

Dacă notăm prin n_{ij} numărul care arată de cîte ori s-a verificat evenimentul $(X_s = a_i) \cap (X_{s+1} = a_j)$ în succesiunea $X_1, X_2, \ldots, X_n$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\frac{n_{ij}}{n}\right) = P_i \qquad \text{(III.3.82)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\left(\frac{n_{ij}}{n}\right) = 0. \qquad \text{(III.3.83)}$$

Demonstrația e aceeași ca și pentru variabila $X_{(n)}$. Relațiile (III.3.82) și (III.3.83) ne arată că $\frac{n_{ij}}{n}$ este o funcție de estimație absolut corectă pentru P_{ij}.

Proprietățile mai sus semnalate, pentru care nu mai dăm demonstrații, deoarece sînt identice cu demonstrațiile date anterior, le vom folosi mai departe în studiul unor programări stochastice de natură specială.

Lanțuri cu legături complete cu recompense

Să considerăm un lanț cu legături complete, care poate trece prin $m + 1$ stări: $a_1, a_2, \ldots a_{m+1}$. Fie X_n, $n \in N^*$ variabilele lanțului. Să asociem acestui șir de variabile aleatoare un alt șir Y_n, $n \in N^*$ astfel încît ori de cîte ori X_n ia valoarea a_j, după ce $X_{n-1} = a_i$, Y_n ia valoarea a_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1$. Succesiunea de variabile Y_n, $n \in N^*$ poartă numele de lanț cu legături complete cu recompense, această denumire provenind din aplicațiile pe care astfel de variabile le au în programarea stochastică.

Ne propunem să determinăm legea de probabilitate a variabilei

$$Z_n = \frac{Y_{(n)} - \mathbf{E}(Y_n)}{\sqrt{\mathbf{E}[Y_{(n)} - \mathbf{E}(Y_n)]^2}} \qquad \text{(III.3.84)}$$

unde

$$Y_{(n)} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \qquad \text{(III.3.85)}$$

pentru $n \to \infty$.

Pentru simplificarea calculelor, vom considera un lanț multiplu de ordinul al doilea. Pentru un lanț multiplu de un ordin finit oarecare demonstrația rămîne aceeași, cu mici diferențe de natură formală.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm prin urmare șirul de variabile aleatoare X_n, $n \in N^*$ care formează un lanț cu legături complete de ordinul al doilea, definit prin probabilitățile (III.3.6), (III.3.7), (III.3.8), (III.3.9), (III.3.10), (III.3.11). Șirul de variabile aleatoare Y_n, $n \in N^*$ ia valorile matricei

$$\bar{A} = (a_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Dacă X_n trece în starea a_j, după ce $X_{n-1} = a_i$, Y_n ia valoarea a_{ij}. Pentru un lanț $\mathcal{L}$ putem demonstra

Teorema VII. Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

1°. Funcțiile $\varphi_{ij}(\bar{p})$ sînt continue în raport cu $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant m$ și admit derivate parțiale, continue și mărginite în acest domeniu, în raport cu p_i; $i = 1, 2, \ldots, m$.

2°. Domeniul Δ al punctelor spațiului $R^{m(m+2)}$, definit prin $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $0 < \varphi_{jk} < 1$, $1 \leqslant i, k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$ este un spațiu metric complet cu distanța $\rho(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta$, $p_i \in \bar{p}$, $\varphi_{ik} \in \bar{q}$ fiecare aplicație $f_j : \Delta \to \Delta$; $j = 1, 2, \ldots, m+1$ reprezentînd trecerea de la punctul $\bar{p}$, $\bar{\varphi}(\bar{p})$ la $\bar{\varphi}_j(\bar{p})$, $\Psi_j\{\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})\}$ fiind mărginită, astfel încît pentru orice $\bar{p}'$, $\bar{p}'' \in \Delta$ să avem

$$\rho\{f_j(\bar{p}'), f_j(\bar{p}'')\} \leqslant \|f\|_j\ \rho(\bar{p}', \bar{p}''),$$

$$\|f\|_j < 1;\ j = j_0$$

$$\|f\|_j \leqslant 1;\ j \neq j_0.$$

3°. Funcțiile $\Psi_{i,j,k}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})\}$, $(i, j, k = 1, \ldots m+1)$ sînt continue în Δ și verifică relațiile

$$0 < \Psi_{i,j,k}\{\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p}_i)\} < 1,$$

oricare ar fi $i, j, k = 1, 2, \ldots, m+1$.

4°. Există un indice i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m+1$ astfel încît

$$\lim p_{ij\underbrace{i_0 i_0 \ldots i_0}_{n},k} = \tilde{p}_k,$$

oricare ar fi indicii $i, j, k = 1, 2, \ldots, m+1$.

5°. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}[Y_{(n)} - \mathbf{E}(Y_{(n)})]^2 = K < \infty$$

variabila Z_n tinde, pentru $n \to \infty$, către legea normală.

Demonstrația acestei teoreme nu diferă esențial de demonstrația teoremei IV. Deaceea nu insistăm asupra ei.

Să introducem o constantă θ, a cărei valoare o lăsăm deocamdată nedeterminată.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm prin

$$f_h^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \mathbf{E}(e^{it(Y_1 + \ldots + Y_n - n\theta)})$$

funcţia caracteristică a variabilei $Y_{(n)} - n\theta$, în ipoteza că variabila Y_n ia valorile a_{hj} cu probabilităţile respective

$$p_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{m+1} p_j = 1.$$

Avem relaţia de recurenţă

$$f_h^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j\ e^{it(a_{hj} - \theta)} f_j^{(n-1)}[\overline{\varphi}_j(\overline{p}),\ \overline{\Psi}_j(\overline{p},\ \overline{\varphi}_j(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta)] \tag{III.3.86}$$

din care rezultă pentru $f_h^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta)$ expresia asimptotică

$$f_h^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^n(t,\ \theta)\ g_h^{(i)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) + g_n(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta) \tag{III.3.87}$$

unde $\mu_i(t,\ \theta)$, $g_h^i(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta)$, $(i = 1,\ \ldots\ k)$, $h = (1,\ \ldots\ m+1)$ şi $g_n(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta)$ sînt funcţii determinate de $\overline{p}$ şi t.

Din (III.3.87) pe baza consideraţiilor făcute în legătură cu relaţia (III.3.69) se arată că $f^{(n)}(\overline{p},\ \overline{\varphi}(\overline{p})\ ;\ t,\ \theta_0)$, θ_0 fiind o valoare convenabil aleasă, tinde uniform pentru $n \to \infty$, către funcţia caracteristică a distribuţiei normale.

§ 4. PROGRAMARE DINAMICĂ CU SUCCESIUNE ÎN LANŢ CU LEGĂTURI COMPLETE

O problemă de programare dinamică cu succesiune în lanţ cu legături complete

Vom trata o problemă de aceeaşi natură cu aceea pe care am considerat-o în cazul succesiunii marcoviene.

O maşină poate lucra în trei faze (stări) : I, II, III. Productivitatea maşinii pe oră este dată de matricea :

$$\begin{pmatrix} 120 & 60 & 250 \\ 60 & 50 & 300 \\ 250 & 260 & 200 \end{pmatrix} \tag{III.4.1}$$

Elementele din prima linie arată productivitatea orară în ipoteza că maşina se găseşte la începutul orei în faza I şi la sfîrşitul orei se găseşte respectiv în fazele I, II, III. De exemplu, productivitatea maşinii este de 60 lei dacă la începutul orei se găsea în faza I şi la sfîrşitul ei în faza II. Dacă la începutul orei maşina se afla în starea III şi pînă la sfîrşitul ei a rămas tot în starea III se realizează o productivitate egală cu 200 lei. Celelalte elemente ale matricei au semnificaţii analoge.

Să admitem că la începutul unei etape, considerată de o oră, maşina avea probabilităţile p_1, p_2, p_3, $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$ de a trece respectiv în fazele I, II, III. Dacă la sfîrşitul etapei maşina a intrat în faza I, probabilităţile respective ca la sfîrşitul etapei următoare să treacă în fazele I, II, III sînt λp_1, λp_2, $1 - \lambda p_1 - \lambda p_2$ unde λ este un număr pozitiv. Dacă la sfîrşitul etapei maşina a intrat în faza II, probabilităţile respective ca la sfîrşitul etapei următoare să treacă în cele trei faze I, II, III sînt aceleaşi, adică λp_1, λp_2, $1 - \lambda p_1 - \lambda p_2$. În sfîrşit, dacă la sfîrşitul etapei maşina a intrat în faza III, probabilităţile ca ea să treacă în etapa următoare în fazele I, II, III sînt respectiv 0,39 ; 0,60 ; 0,01.

Avem de ales între două politici $\lambda = 0{,}95$ şi $\lambda = 0{,}85$. Care dintre ele este cea mai avantajoasă în ipoteza că timpul de funcţionare este nelimitat?

Se vede că modul de comportare de la etapă la etapă este dat de un lanţ cu legături complete care trece prin trei stări: I, II, III. Lanţul este simplu şi omogen, avînd următoarele funcţii fundamentale:

$$\varphi_{11}(p_1, p_2) = \lambda p_1 ; \ \varphi_{12}(p_1, p_2) = \lambda p_2, \ \varphi_{13}(p_1, p_2) = 1 - \lambda p_1 - \lambda p_2$$
$$\varphi_{21}(p_1, p_2) = \lambda p_1, \ \varphi_{22}(p_1, p_2) = \lambda p_2, \ \varphi_{23}(p_1, p_2) = 1 - \lambda p_1 - \lambda p_2$$
$$\varphi_{31}(p_1, p_2) = 0{,}39, \ \varphi_{23}(p_1, p_2) = 0{,}60, \ \varphi_{33}(p_1, p_2) = 0{,}01.$$

Deoarece, începînd de la un anumit rang, avem $p_1 \leqslant 0{,}39$ şi $p_2 \leqslant 0{,}60$, se constată uşor că sîntem în prezenţa unui lanţ $\mathcal{L}$.

Notînd prin a_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3$ elementele matricei (III.4.1) şi folosind notaţiile din paragraful 3, productivitatea medie a maşinii pe o etapă este dată de expresia

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\left(\sum_{i,j=1}^{3} \frac{n_{ij}}{n} a_{ij} \right) \qquad \text{(III.4.2)}$$

sau

$$\sum_{i,j=1}^{3} P_{ij} \, a_{ij}. \qquad \text{(III.4.3)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Va trebui deci să calculăm valoarea expresiei (III.4.3) pentru $\lambda = 0{,}95$ și $\lambda = 0{,}85$ și să alegem cea mai mare dintre cele două valori. Pentru calculul valorilor P_{ij} vom folosi metoda Monte Carlo.

Vom efectua mai întîi calculul pentru $\lambda = 0{,}95$. Vom folosi în acest scop un tabel cu numere întîmplătoare, din care vom lua primele 200. Calculele sînt redate în tabelul 68.

(68)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
15	0,3800	0,3800	0,2400	3		
85	0,3900	0,6000	0,0100	1		
47	0,3705	0,5700	0,0595	1		
13	0,3520	0,5415	0,0865	1		
10	0,3344	0,5144	0,1512	1	1,8269	2,6059
05	0,3177	0,4887	0,1936	1		
65	0,3018	0,4643	0,2339	1		
59	0,2867	0,4411	0,2722	1		
31	0,2724	0,4190	0,3086	3		
91	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,5686	2,4131
63	0,3705	0,5700	0,0595	3		
89	0,3900	0,6000	0,0100	1		
70	0,3705	0,5700	0,0595	1		
14	0,3520	0,5415	0,0865	3		
92	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,8730	2,8815
81	0,3705	0,5700	0,0595	1		
87	0,3520	0,5415	0,0865	1		
74	0,3344	0,5144	0,1512	3		
94	0,3900	0,6000	0,0100	1		
69	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,8174	2,7959
82	0,3520	0,5415	0,0865	1		
25	0,3344	0,5144	0,1512	1		
82	0,3177	0,4887	0,1935	3		
83	0,3900	0,6000	0,0100	1		
73	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,7646	2,7146
91	0,3520	0,5415	0,0865	1		
33	0,3344	0,5144	0,1512	1		
56	0,3177	0,4887	0,1935	1		
88	0,3900	0,6000	0,0100	3		
77	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,7646	2,7146
					10,6151	16,1256

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 68 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
32	0,3520	0,5415	0,0865	1		
44	0,3344	0,5144	0,1512	1		
94	0,3900	0,6000	0,0100	3		
13	0,3705	0,5700	0,0595	1		
78	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,7989	2,7674
42	0,3344	0,5144	0,1512	1		
04	0,3900	0,6000	0,0100	3		
82	0,3705	0,5700	0,0595	1		
38	0,3520	0,5415	0,0865	1		
91	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,8369	2,8259
54	0,3705	0,5700	0,0595	1		
65	0,3520	0,5415	0,0865	1		
49	0,3344	0,5144	0,1512	1		
03	0,3900	0,6000	0,0100	3		
56	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,8174	2,7959
48	0,3520	0,5415	0,0865	1		
23	0,3344	0,5144	0,1512	1		
43	0,3177	0,4887	0,1936	1		
40	0,3018	0,4643	0,2339	1		
66	0,2867	0,4411	0,2722	3	1,5926	2,4500
77	0,3900	0,6000	0,0100	1		
40	0,3705	0,5700	0,0595	1		
69	0,3520	0,5415	0,0865	1		
26	0,3344	0,5144	0,1512	1		
55	0,3177	0,4887	0,1936	1	1,9219	2,7009
06	0,3017	0,4643	0,2339	1		
50	0,2867	0,4411	0,2722	1		
68	0,2724	0,4190	0,3086	1		
31	0,2588	0,3980	0,3432	1		
59	0,2459	0,3781	0,3760	1	1,2655	2,1005
59	0,2336	0,3592	0,4072	1		
72	0,3900	0,6000	0,0100	3		
51	0,3705	0,5700	0,0595	1		
15	0,3520	0,5415	0,0865	1		
46	0,3344	0,5144	0,1512	1	1,6805	2,5851
					11,9137	18,2257

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 68 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
23	0,3177	0,4887	0,1936	1		
54	0,3017	0,4643	0,2339	1		
73	0,2867	0,4411	0,2722	1		
55	0,2724	0,4190	0,3086	1		
21	0,2588	0,3980	0,3432	1	1,4373	2,2111
36	0,2459	0,3781	0,3760	1		
06	0,2336	0,3592	0,4072	1		
37	0,2219	0,3412	0,4369	1		
71	0,3900	0,6000	0,0100	3		
13	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,4619	2,2485
28	0,3520	0,5415	0,0865	1		
47	0,3344	0,5144	0,1512	1		
66	0,3177	0,4887	0,1936	1		
40	0,3017	0,4643	0,2339	1		
63	0,2867	0,4411	0,2722	1	1,3748	2,4500
25	0,2724	0,4190	0,3086	1		
61	0,2588	0,3980	0,3432	1		
44	0,2459	0,3781	0,3760	1		
24	0,2336	0,3592	0,4072	1		
27	0,2219	0,3412	0,4369	1	1,2326	1,8955
39	0,2108	0,3241	0,4651	1		
52	0,2003	0,3079	0,4918	1		
85	0,3900	0,6000	0,0100	3		
48	0,3705	0,5700	0,0595	1		
19	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,5236	2,3435
81	0,3344	0,5144	0,1512	1		
43	0,3177	0,4887	0,1936	1		
98	0,3900	0,6000	0,0100	3		
98	0,3705	0,5700	0,0595	1		
04	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,7646	2,7146
09	0,3344	0,5144	0,1512	1		
97	0,3900	0,6000	0,0100	3		
97	0,3705	0,5700	0,0595	1		
05	0,3520	0,5415	0,0865	1		
97	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,8369	2,8259
					10,6317	16,6891

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 68 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
01	0,3705	0,5700	0,0595	1		
51	0,3520	0,5415	0,0865	1		
35	0,3344	0,5144	0,1512	1		
87	0,3900	0,6000	0,0100	3		
33	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,8174	2,7959
67	0,3520	0,5415	0,0865	1		
89	0,3344	0,5144	0,1512	1		
53	0,3177	0,4887	0,1936	1		
05	0,3017	0,4643	0,2339	1		
46	0,2867	0,4411	0,2722	3	1,5925	2,4500
73	0,3900	0,6000	0,0100	1		
47	0,3705	0,5700	0,0595	1		
21	0,3520	0,5415	0,0865	3		
99	0,3900	0,6000	0,0100	1		
90	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,9730	2,8815
17	0,3520	0,5415	0,0865	1		
42	0,3344	0,5144	0,1512	1		
84	0,3177	0,4887	0,1936	1		
14	0,3017	0,4643	0,2339	3		
94	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,6958	2,6079
36	0,3705	0,5700	0,0595	1		
22	0,3520	0,5415	0,0865	3		
97	0,3900	0,6000	0,0100	1		
07	0,3705	0,5700	0,0595	1		
79	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,8350	2,8230
00	0,3344	0,5144	0,1512	1		
55	0,3177	0,4887	0,1936	1		
25	0,3017	0,4643	0,2339	1		
52	0,2867	0,4411	0,2722	1		
88	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,6305	2,5084
21	0,3705	0,5700	0,0595	1		
88	0,3520	0,5415	0,0865	1		
08	0,3344	0,5144	0,1512	1		
40	0,3177	0,4887	0,1935	3		
84	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,7646	2,7146
					12,3088	18,7813

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 68 (continuare)

n	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
30	0,3705	0,5700	0,0595	1		
43	0,3520	0,5415	0,0865	1		
77	0,3344	0,5144	0,1512	1		
84	0,3177	0,4887	0,1936	1		
05	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,7646	2,7146
87	0,3705	0,5700	0,0595	1		
75	0,3520	0,5415	0,0865	1		
71	0,3344	0,5144	0,1512	1		
68	0,3177	0,4887	0,1935	1		
21	0,3017	0,4643	0,2339	1	1,6763	2,5789
36	0,2867	0,4411	0,2722	1		
10	0,2724	0,4190	0,3080	1		
55	0,2588	0,3980	0,3432	1		
08	0,2459	0,3781	0,3760	1		
10	0,2336	0,3592	0,4072	1	1,9219	2,7009
64	0,2219	0,3412	0,4369	1		
40	0,2098	0,3241	0,4651	3		
90	0,3900	0,6000	0,0100	1		
40	0,3705	0,5700	0,0595	1		
20	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,5442	2,3768
26	0,3344	0,5144	0,1512	1		
18	0,3177	0,4887	0,1936	1		
31	0,3017	0,4643	0,2339	1		
36	0,2867	0,4411	0,2722	1		
44	0,2724	0,4190	0,3086	1	1,5129	2,3275
21	0,2588	0,3980	0,3432	1		
46	0,2459	0,3781	0,3760	1		
03	0,2336	0,3592	0,4072	3		
60	0,3900	0,6000	0,0100	1		
39	0,3705	0,5700	0,0595	1	1,4980	2,3053
13	0,3520	0,5415	0,0865	1		
46	0,3344	0,5144	0,1512	3		
98	0,3900	0,6000	0,0100	1		
00	0,3705	0,5700	0,0595	1		
26	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,7989	2,7674
					11,7168	17,7714

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 68 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,95	
89	0,3344	0,5144	0,1512	1		
30	0,3177	0,4887	0,1936	1		
60	0,3017	0,4643	0,2339	1		
22	0,2867	0,4411	0,2722	1		
15	0,2724	0,4190	0,3086	1	1,5129	2,3275
57	0,2588	0,3980	0,3432	1		
62	0,2459	0,3781	0,3760	1		
32	0,2336	0,3592	0,4072	1		
02	0,2219	0,3412	0,4369	1		
23	0,2098	0,3241	0,4651	1	1,1700	1,8006
15	0,1993	0,3078	0,4918	1		
23	0,1893	0,2924	0,5183	3		
67	0,3900	0,6000	0,0100	1		
09	0,3705	0,5700	0,0595	1		
05	0,3520	0,5415	0,0865	1	1,5011	2,3117
02	0,3344	0,5144	0,1512	3		
96	0,3900	0,6000	0,0100	1		
30	0,3705	0,5700	0,0595	1		
88	0,3520	0,5415	0,0865	1		
68	0,3344	0,5144	0,1512	1	1,7813	2,7403
21	0,3177	0,4887	0,1936	1		
12	0,3017	0,4643	0,2329	1		
31	0,2867	0,4411	0,2722	3		
89	0,3900	0,6000	0,0100	1		
34	0,3705	0,5700	0,0595	3	1,6766	2,5641
95	0,3900	0,6000	0,0100	1		
96	0,3705	0,5700	0,0595	1		
45	0,3520	0,5415	0,0865	1		
50	0,3344	0,5144	0,1512	1		
69	0,3177	0,4887	0,1936	1	1,9219	2,7009
					9,5638	14,4451
					66,7507	99,6982

În prima coloană a tabelului 68 am așezat numerele întîmplătoare. În coloana a doua este trecută probabilitatea p_1 de trecere în prima etapă, după ce cunoaștem realizările din etapele precedente ; în coloana a treia este așezată valoarea p_2 a probabilității de trecere în etapa a doua, după ce cunoaștem rezultatele din etapele precedente.

Scanned with OKEN Scanner

În coloana următoare sînt trecute valorile $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Coloana a cincea arată faza la care se ajunge după extragerea numărului aleator din prima coloană. Deoarece pentru primele două faze probabilităţile de trecere sînt aceleaşi, am notat cu „1" şi cazurile cînd ne aflam în faza II.

Celelalte coloane conţin sumele parţiale ale coloanelor p_1 şi p_2.

În prima linie am pornit de la probabilităţile iniţiale pe care le-am ales $p_1 = 0{,}40$, $p_2 = 0{,}40$. Deci cu probabilitatea $p_1 = 0{,}40$ putem trece în faza I, cu probabilitatea $p_2 = 0{,}40$ în faza II şi cu probabilitatea $p_3 = 0{,}20$ în faza III.

Admitem că într-o urnă avem aşezate toate numerele de la 1 la 100 inclusiv. Atunci, cu probabilitatea 0,40, putem să extragem din urnă un număr mai mic sau egal cu 40, cu probabilitatea 0,40 un număr de la 41 la 80 inclusiv limitele, cu probabilitatea 0,20 un număr întîmplător mai mare decît 81. Un număr întîmplător mai mic sau egal cu 40 poate fi interpretat că arată trecerea în faza I, un număr întîmplător de la 41 pînă la 80 inclusiv arată trecerea în faza II, iar un număr mai mare decît 80 — în faza III.

În prima etapă a apărut numărul 15. Prin urmare s-a realizat faza I şi valorile lui p_1 şi p_2 sînt respectiv: $0{,}95 \times 0{,}40 = 0{,}3800$ şi $0{,}95 \times \times 0{,}40 = 0{,}3800$. În etapa a doua avem numărul 85. Aceasta înseamnă că s-a realizat faza III şi că, deci, probabilităţile p_1, p_2 în etapa a doua vor lua respectiv valorile 0,39 şi 0,60. La începutul etapei a treia găsim numărul întîmplător 47. Faţă de probabilităţile 0,39 şi 0,60, aceasta înseamnă că s-a realizat faza II. Prin urmare, valorile lui p_1 şi p_2 devin respectiv $0{,}95 \times 0{,}39 = 0{,}3705$ şi $0{,}95 \times 0{,}60 = 0{,}5700$. Procedînd astfel, completăm tabloul pentru 200 etape. Suma valorilor din coloana a doua este 66,7507 iar suma celor din coloana a treia este 99,6982. Găsim astfel pentru p_1 şi p_2, următoarele valori aproximative:

$$P_1 = \frac{66{,}6252}{200} = 0{,}334, \quad P_2 = \frac{99{,}6982}{200} = 0{,}498.$$

Valorile lui P_1 şi P_2 obţinute după n etape, adică după folosirea a n numere întîmplătoare, variază în modul următor:

(69)

n	P_1	P_2
50	0,353	0,490
100	0,331	0,487
150	0,339	0,503
200	0,334	0,498

Scanned with OKEN Scanner

Evident, aplicînd metoda Monte Carlo în continuare, ajungem să calculăm valorile P_1 și P_2 cu un număr din ce în ce mai mare de zecimale exacte.

Din examinarea formulei (III.4.3) reiese că trebuie să calculăm valorile P_{ij}; $i, j = 1, 2, 3$.

Din formulele (III.3.80) și (III.3.81) rezultă că pentru calculul valorii P_{ij} putem folosi tot metoda Monte Carlo, considerînd variabila aleatoare Z_n, care reprezintă valorile luate de probabilităţile evenimentului $(X_n = a_i) \cap (X_{n+1} = a_j)$, după ce sînt cunoscute valorile luate de variabilele anterioare $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Să notăm

$$p_1 = P(X_n = \text{I}),\ p_2 = P(X_n = \text{II}),\ p_3 = (X_n = \text{III}),$$

după ce cunoaştem fazele prin care au trecut variabilele succesive $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. Cu alte cuvinte, valorile $p_1, p_2, p_3 = 1 - p_1 - p_2$ sînt cele găsite în etapa n în tabelul 68.

Ţinînd seamă de definiţia lanţului cu legături complete obţinem:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}[(X_n = \text{I}) \cap (X_{n+1} = \text{I})] = \lambda p_1^2;\ \mathbf{P}[(X_n = \text{I}) \cap (X_{n+1} = \text{II})] = \lambda p_1 p_2;\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{I}) \cap (X_{n+1} = \text{III})] = p_1(1 - \lambda p_1 - \lambda p_2)\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{II}) \cap (X_{n+1} = \text{I})] = \lambda p_1 p_2;\ \mathbf{P}[(X_n = \text{II}) \cap (X_{n+1} = \text{II})] = \lambda p_2^2;\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{II}) \cap (X_{n+1} = \text{III})] = p_2(1 - \lambda p_1 - \lambda p_2)\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{III}) \cap (X_{n+1} = \text{I})] = 0{,}39(1 - p_1 - p_2);\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{III}) \cap (X_{n+1} = \text{II})] = 0{,}60(1 - p_1 - p_2);\\
\mathbf{P}[(X_n = \text{III}) \cap (X_{n+1} = \text{III})] = 0{,}01(1 - p_1 - p_2)
\end{gathered} \tag{III.4.4}$$

Probabilităţile limită

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \tag{III.4.5}$$

sînt respectiv egale cu elementele matricei

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda \Sigma p_1^2}{200} & \frac{\lambda \Sigma p_1 p_2}{200} & \frac{\Sigma p_1(1 - \lambda p_1 - \lambda p_2)}{200} \\ \frac{\lambda \Sigma p_1 p_2}{200} & \frac{\lambda \Sigma p_2^2}{200} & \frac{\Sigma p_2(1 - \lambda p_1 - \lambda p_2)}{200} \\ \frac{0{,}39\ \Sigma(1 - p_1 - p_2)}{200} & \frac{0{,}60\ \Sigma(1 - p_1 - p_2)}{200} & \frac{0{,}01\ \Sigma(1 - p_1 - p_2)}{200} \end{pmatrix} \tag{III.4.6}$$

unde $\lambda = 0{,}95$.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată, întocmai ca și pentru calculul probabilităților P_1 și P_2, că probabilitățile P_{ij} din matricea (III.4.5) sînt aproximate de elementele matricei (III.4.6) cu două zecimale exacte.

Se vede că pentru calculul elementelor matricei (III.4.6) este suficient să calculăm din tabelul 68 valorile

$$\frac{\Sigma p_1^2}{200}, \quad \frac{\Sigma p_1 p_2}{200}, \quad \frac{\Sigma p_2^2}{200}$$

Efectuînd calculele găsim

$$\frac{\Sigma p_1^2}{200} = 0{,}11; \quad \frac{\Sigma p_1 p_2}{200} = 0{,}18; \quad \frac{\Sigma p_2^2}{200} = 0{,}26$$

De unde rezultă pentru P_{ij} următoarele valori aproximative

$$\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}06 \\ 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}09 & 0{,}01 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.4.7)}$$

Înmulțind fiecare element al acestei matrice cu respectivul element din matricea (III.4.1) obținem:

$$\begin{pmatrix} 12 & 10{,}20 & 15 \\ 10{,}20 & 12{,}50 & 27 \\ 15 & 23{,}40 & 2 \end{pmatrix}$$

Adunînd aceste valori găsim productivitatea medie orară

$$A_1 = 127{,}30$$

Să examinăm acum politica a doua, cînd $\lambda = 0{,}85$. Aplicînd în același mod metoda Monte Carlo, construim tabelul 70.

(70)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
15	0,3400	0,3400	0,3200	3		
85	0,3900	0,6000	0,0100	1		
47	0,3315	0,5100	0,0685	1		
13	0,2818	0,4335	0,0847	1		
10	0,2395	0,3685	0,0920	1	1,5828	2,2520
					1,5828	2,2520

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
05	0,2036	0,3132	0,0732	3		
65	0,3900	0,6000	0,0100	1		
59	0,3315	0,5100	0,0685	1		
31	0,2818	0,4335	0,0847	1		
91	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,5969	2,4567
63	0,3315	0,5100	0,0685	1		
89	0,3900	0,6000	0,0100	3		
70	0,3315	0,5100	0,0685	1		
14	0,2818	0,4335	0,0847	1		
92	0,3900	0,6000	0,0100	3	1,7248	2,6535
81	0,3315	0,5100	0,0685	1		
87	0,3900	0,6000	0,0100	3		
74	0,3315	0,5100	0,0685	1		
94	0,3900	0,6000	0,0100	1		
69	0,3315	0,5100	0,0685	1	1,7745	2,7300
82	0,2818	0,4335	0,0847	1		
25	0,2395	0,3685	0,0920	3		
82	0,3900	0,6000	0,0100	1		
83	0,3315	0,5100	0,0685	1		
73	0,2818	0,4335	0,0847	3	1,5246	2,3455
91	0,3900	0,6000	0,0100	1		
33	0,3315	0,5100	0,0685	1		
56	0,2818	0,4335	0,0847	3		
88	0,3900	0,6000	0,0100	1		
77	0,3315	0,5100	0,0685	1	1,7248	2,6535
32	0,2818	0,4335	0,0847	1		
44	0,2395	0,3685	0,0920	3		
94	0,3900	0,6000	0,0100	1		
13	0,3315	0,5100	0,0685	1		
78	0,2818	0,4335	0,0847	1	1,5246	2,3455
42	0,2395	0,3685	0,0920	1		
04	0,2036	0,3132	0,0732	3		
82	0,3900	0,6000	0,0100	1		
38	0,3315	0,5100	0,1585	3		
91	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,5546	2,3917
					11,4248	17,5764

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
54	0,3315	0,5100	0,1585	1		
65	0,2818	0,4335	0,2847	1		
49	0,2395	0,3685	0,3920	1		
03	0,2036	0,3132	0,4832	3		
56	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,4464	2,2252
48	0,3315	0,5100	0,1585	1		
23	0,2818	0,4335	0,2850	1		
43	0,2395	0,3685	0,3920	1		
40	0,2036	0,3132	0,4832	3		
66	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,4464	2,2252
77	0,3315	0,5100	0,5185	1		
40	0,2818	0,4335	0,2847	1		
69	0,2395	0,3685	0,3920	1		
26	0,2036	0,3132	0,4832	3		
55	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,4464	2,2252
06	0,3315	0,5100	0,1585	1		
50	0,2818	0,4335	0,2847	1		
68	0,2395	0,3685	0,3920	1		
31	0,2036	0,3132	0,4832	3		
59	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,4464	2,2252
59	0,3315	0,5100	0,1585	1		
72	0,2818	0,4335	0,2847	1		
51	0,2395	0,3685	0,3920	1		
15	0,2036	0,3132	0,4832	1		
46	0,1730	0,2662	0,5608	1	1,2294	1,8914
23	0,1470	0,2263	0,6267	3		
54	0,3900	0,6000	0,0100	1		
73	0,3315	0,5100	0,1585	1		
55	0,2818	0,4335	0,2847	1		
21	0,2395	0,3685	0,3920	1	1,3898	2,1383
36	0,2036	0,3132	0,4832	1		
06	0,1730	0,2662	0,5608	1		
37	0,1470	0,2263	0,6267	3		
71	0,3900	0,6000	0,0100	1		
13	0,3315	0,5100	0,1585	1	1,3451	1,9157
					9,7499	14,8462

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
28	0,2818	0,4335	0,2847	1		
47	0,2395	0,3685	0,3920	3		
67	0,3900	0,6000	0,0100	1		
40	0,3315	0,5100	0,1585	1		
63	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,5246	2,3655
25	0,2395	0,3685	0,3920	3		
61	0,3900	0,6000	0,0100	1		
44	0,3315	0,5100	0,1585	1		
24	0,2818	0,4335	0,2847	1		
27	0,2395	0,3685	0,3920	1	1,4823	2,2805
39	0,2036	0,3132	0,4832	3		
52	0,3900	0,6000	0,0100	1		
85	0,3315	0,5100	0,1585	1		
48	0,2818	0,4335	0,2847	1		
19	0,2395	0,3685	0,3920	3	1,4464	2,2252
81	0,3900	0,6000	0,0100	1		
43	0,3315	0,5100	0,1585	3		
98	0,3900	0,6000	0,0100	1		
98	0,3315	0,5100	0,1585	1		
04	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,7248	2,6535
09	0,2395	0,3685	0,3920	3		
97	0,3900	0,6000	0,0100	1		
97	0,3315	0,5100	0,1585	1		
05	0,2818	0,4335	0,2847	3		
97	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,6328	2,5125
01	0,3315	0,5100	0,1585	1		
51	0,2818	0,4335	0,2847	1		
35	0,2395	0,3685	0,3920	3		
87	0,3900	0,6000	0,0100	1		
33	0,3315	0,5100	0,1585	1	1,5743	2,4220
67	0,2818	0,4335	0,2847	3		
89	0,3900	0,6000	0,0100	1		
53	0,3315	0,5100	0,1585	1		
05	0,2818	0,4335	0,2847	1		
46	0,2395	0,3685	0,3920	3	1,5246	2,3455
					10,9098	16,8047

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
73	0,3900	0,6000	0,0100	1		
47	0,3315	0,5100	0,1585	1		
21	0,2818	0,4335	0,2847	3		
99	0,3900	0,6000	0,0100	1		
90	0,3315	0,5100	0,1585	1	1,7248	2,6535
17	0,2818	0,4335	0,2847	1		
42	0,2395	0,3685	0,3920	3		
84	0,3900	0,6000	0,0100	1		
14	0,3315	0,5100	0,1585	3		
94	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,6328	2,5120
36	0,3315	0,5100	0,1585	1		
22	0,2818	0,4335	0,2847	3		
97	0,3900	0,6000	0,0100	1		
07	0,3315	0,5100	0,1585	1		
79	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,6166	2,4870
00	0,2395	0,3685	0,3920	1		
55	0,2036	0,3132	0,4832	1		
25	0,1730	0,2662	0,5608	3		
52	0,3900	0,6000	0,0100	1		
88	0,3315	0,5100	0,1585	1	1,3376	2,0579
21	0,2818	0,4335	0,2847	3		
88	0,3900	0,6000	0,0100	1		
08	0,3315	0,5100	0,1585	1		
40	0,2818	0,4335	0,2847	3		
84	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,6751	2,5770
30	0,3315	0,5100	0,1585	1		
43	0,2818	0,4335	0,2847	3		
77	0,3900	0,6000	0,0100	1		
84	0,3315	0,5100	0,1585	1		
05	0,2818	0,4335	0,2847	3	1,6166	2,4870
87	0,3900	0,6000	0,0100	1		
75	0,3315	0,5100	0,1585	1		
71	0,2818	0,4335	0,2847	1		
68	0,2395	0,3685	0,3920	1		
21	0,2036	0,3132	0,4832	1	1,4464	2,2252
					11,0499	16,9996

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
36	0,1730	0,2662	0,5608	1		
10	0,1470	0,2263	0,6267	3		
55	0,3900	0,6000	0,0100	1		
08	0,3315	0,5100	0,1585	1		
10	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,3233	2,0360
64	0,2395	0,3685	0,3920	1		
40	0,2036	0,3132	0,4832	3		
90	0,3900	0,6000	0,0100	1		
40	0,3315	0,5100	0,1585	1		
20	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,4464	2,2252
26	0,2395	0,3685	0,3920	1		
18	0,2036	0,3132	0,4832	1		
31	0,1730	0,2662	0,5608	1		
36	0,1470	0,2263	0,6267	3		
44	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,1531	1,7742
21	0,3315	0,5100	0,1585	1		
46	0,2818	0,4335	0,2847	1		
03	0,2395	0,3685	0,3920	1		
60	0,2036	0,3132	0,4832	1		
39	0,1730	0,2662	0,5608	1	1,2294	1,8914
13	0,1470	0,2263	0,6267	3		
46	0,3900	0,6000	0,0100	1		
98	0,3315	0,5100	0,1585	1		
00	0,2818	0,4335	0,2847	1		
26	0,2395	0,3685	0,3920	3	1,3898	2,1383
89	0,3900	0,6000	0,0100	1		
30	0,3315	0,5100	0,1585	1		
60	0,2818	0,4335	0,2847	1		
22	0,2395	0,3685	0,3920	1		
15	0,2036	0,3132	0,4832	3	1,4464	2,2252
57	0,3900	0,6000	0,0100	1		
62	0,3315	0,5100	0,1585	1		
32	0,2818	0,4335	0,2847	1		
02	0,2395	0,3685	0,3920	1		
23	0,2036	0,3132	0,4832	1	1,4464	2,2252
					9,4348	14,5155

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 70 (continuare)

N	p_1	p_2	p_3	0	0,85	
15	0,1730	0,2662	0,5608	1		
23	0,1470	0,2263	0,6267	3		
67	0,3900	0,6000	0,0100	1		
09	0,3315	0,5100	0,1585	1		
05	0,2818	0,4335	0,2847	1	1,3233	2,0360
02	0,2395	0,3685	0,3920	3		
96	0,3900	0,6000	0,0100	1		
30	0,3315	0,5100	0,1585	3		
88	0,3900	0,6000	0,0100	1		
68	0,3315	0,5100	0,1585	1	1,6825	2,5885
21	0,2818	0,4335	0,2847	1		
12	0,2395	0,3685	0,3920	1		
31	0,2036	0,3132	0,4832	3		
89	0,3900	0,6000	0,0100	1		
34	0,3315	0,5100	0,1585	3	1,4464	2,2252
95	0,3900	0,6000	0,0100	1		
96	0,3315	0,5100	0,1585	1		
45	0,2818	0,4335	0,2847	1		
50	0,2395	0,3685	0,3920	3		
69	0,3900	0,6000	0,0100	1	1,6328	2,5120
					6,0850	9,3617
					60,2367	92,3541

Probabilităţile limită P_1 şi P_2 au respectiv valorile din tabelul 71.

(71)

n	P_1	P_2
50	0,318	0,486
100	0,305	0,467
150	0,307	0,470
200	0,301	0,462

Începînd de la etapa 100, primele două zecimale se stabilizează. Putem lua deci

$$P_1 = 0{,}30, \quad P_2 = 0{,}46.$$

Calculînd sumele Σp_1^2, $\Sigma p_1 p_2$, Σp_2^2 pentru valorile cuprinse în tabelul 70 obţinem

$$\frac{\Sigma p_1^2}{200} = 0{,}09\,; \quad \frac{\Sigma p_1 p_2}{200} = 0{,}14\,; \quad \frac{\Sigma p_2^2}{200} = 0{,}22.$$

Înlocuind în matricea (III.4.6) expresiile de mai sus şi luînd $\lambda = 0{,}85$ avem

$$\begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}10 \\ 0{,}12 & 0{,}19 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Înmulţim elementele acestei matrice cu elementele corespunzătoare ale matricei (III.4.1). Rezultă astfel

$$\begin{pmatrix} 9{,}60 & 7{,}20 & 25 \\ 7{,}20 & 9{,}50 & 45 \\ 25 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

Adunînd aceste valori obţinem productivitatea medie orară

$$A_2 = 169{,}50.$$

Diferenţa dintre A_2 şi A_1 nu poate fi influenţată de condiţiile de aproximare în care lucrăm. Deducem că politica a doua ($\lambda = 0{,}85$) este mai favorabilă decît prima ($\lambda = 0{,}95$), fapt care apriori era greu de prevăzut.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

CAPITOLUL I

1. Balbar, M. N., *Distribution of Solutions of a set of Linear Equations (with applications to linear programming).* În „Journal American Statistics Association", vol. 50 (1953), pp. 854—869.
2. Bereanu, B., *On Stochastic Linear Programming I, Distribution problems: a single random variable.* În „Revue de Mathématiques pures et appliquées", Tome VIII, nr. 4, 1963, pp. 683—698.
3. Bereanu, B., *On Stochastic Linear Programming II, Distribution problems, Non-stochastic Technological Matrix.* În „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées". Tome XI, Nr. 6, 1966, pp. 713—726.
4. Bereanu, B., *Stochastic Linear Programming.* În „Journal of Mathematical Analysis and Applications", vol. 15, nr. 2, 1966, pp. 280—294.
5. Bereanu, B., *Soluții cu risc minim în programarea liniară.* În „Studii de statistică", Lucrările celei de a treia consfătuiri științifice de statistică, 5—7 dec. 1963, pp. 26—40.
6. Bereanu, B., *Decision Regions and Minimum Risk Solutions in Linear Programming.* Raport prezentat la Colocviul pentru aplicarea matematicilor în economie, Budapesta, iunie 1963.
7. Bereanu, B., *Regions de décisions et répartition de l'optimum dans la programmation linéaire.* În Comptes rendus des Séances de l'Académie des Science, Paris, 1964, Tome 259, nr. 7, pp. 1393—1396.
8. Brans, J. P., *Programmes linéaires stochastiques.* În „Cahier du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle", vol. 6, nr. 1, 1964, pp. 19—43.
9. Charnes, A., Cooper W., Ferguson, A., *Optimal Estimation of Executive Compenssation by Linear Programming.* În „Management Science", vol. I, 1955, pp. 138—151.
10. Charnes, A., Cooper, W., *Chance-constrained Programming.* În „Management Science", vol. 6, 1959, pp. 73—79.
11. Ciucu, G., Iosifescu M., Theodorescu R., *Teoria jocurilor*, Editura Tehnică, București, 1965.
12. Cohen, A. C., *Estimating a Mean and Variance of Normal Populations from Singly Truncated and Doubly Truncated Sample.* În „Annals of Mathematics Statistics", vol. 21, 1950.
13. Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.
14. Dantzig, G. B., *Linear Programming under Uncertainty.* În „Management Science", vol. I, nr. 1, 1955, pp. 197—206.
15. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, New-York, 1963, cap. 25.
16. Dantzig, J. B., Ferguson, A. R., *The Allocation of Aircraft to Routes.* În „Management Science", vol. 3, nr. 1, 1956, pp. 45—73.

Scanned with OKEN Scanner

17. Dantzig, G. B., Madansky, A., *On the Solution of two-stage Linear Programs under Uncertainty*, Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on the Mathematical Statistics on Probability, vol. I, 1960, pp. 165—176.
18. Dantzig, G. B., Wolfe, Ph., *The Decomposition Algorithm for Linear Programs*. În „Econometrica", vol. 29, 1961, pp. 767—778.
19. Dresler, M., Karlin, S., Shapley, L. S., *Polinomial Games*. În „American Mathematics Studies" nr. 24, 1950, pp. 161—180.
20. Ferguson, A., Allen, R., Dantzig, G., *Notes of Linear Programming*, Part. XVI, The Problem of Routing Aircraft a Mathematical Solution, The RAND Cooperation Research Memorandum, R. M. 1963, Sept. 1, 1954.
21. Fortet, R., *Programmes Linéaires Stochastiques*. Colloquium on Applications on Mathematics to Economics, Budapest, 1963, pp. 99—119.
22. Freund, D., *Introduction of Risk into a Programming Model*. În „Econometrica" vol. 24, 1956, pp. 253—263.
23. Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, London, 1966.
24. Ionescu, H., Mirescu P., Nadejde, I., *Programarea liniară*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1964 cap. IV.
25. Iosifescu M., Theodorescu R., *Aspecte stochastice ale programării liniare*. În „Studii de Statistică", Lucrările Consfătuirii Ştiinţifice de Matematică, 27—29 Nov. 1961, pp. 83—92.
26. Iosifescu M., şi Theodorescu R., *Asupra programării liniare stochastice*, Comunicările Academiei R.P.R. Tom XII, Nr. 3, 1962, pp. 299—301.
27. Iosifescu M., Theodorescu R., *Sur la programmation linéaire*, Comptes rendus des Seances de l'Académie de Sciences Paris, Tome 256, nr. 23, 1963, pp. 4831—4833.
28. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., Theodorescu, R., *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966.
29. Madansky, A., *Linear Programming under Uncertainty, Recent Advances in Mathematical Programming*, Ed. R. L. Graves and P. Wolfe, Mc. Graw-Hill Book, London, 1963, pp. 103—109.
30. Madansky, A., *Bounds on the Expectation of a Convex Function of a Multivariate Randon Variable*. În „The Annals of Mathematical Statistics" vol. 30, nr. 3, 1959, pp. 743—746.
31. Madansky, A., *Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems*., În „Management Science", vol. 6, nr. 2, 1960, pp. 197—204.
32. Madansky, A., *Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty*. În „Operations Research", vol. 10, 1962, pp. 463—471.
33. Mangasarian, O. L., Rosen, J. B., *Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming*. În „Operations Research" vol. 12, nr. 1, 1964, pp. 143—154.
34. Mihoc Gh., *Unele precizări în legătură cu aplicarea programării liniare*. În „Revista de statistică" nr. 12, 1959, pp. 13—18.
35. Mihoc, Gh., Nădejde I., *Programarea parametrică şi neliniară*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967.
36. Mihoc, Gh., Urseanu, V., *Matematici aplicate în statistică*, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1962, Cap. XXVI.
37. Onicescu, O. *Strategia jocurilor cu aplicaţii la programarea liniară*, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1961.
38. Parzen, E., *Modern Probability Theory and its Applications*, J. Wiley, New York, 1960.
39. Prékopa, A., *On the Probability Distribution of the Optimum of a Random Linear Program*. În „Siam Journal of Control", vol. 4, nr. 1, 1966, pp. 211—222.
40. Saaty, T. L., *Coefficient Perturbation of a Constrained Extremum*. În „Operations Research", vol. 7, nr. 3, 1959, pp. 294—302.

Scanned with OKEN Scanner

41. Sălăjan, A. *Câteva observații asupra unei probleme de programare stochastică.* În „Studii de Statistică", Lucrările Consfătuirii științifice de Matematică, 27—29 Nov. 1961.
42. Sengupta, J. K., Millham C., Tintner G., *On the Stability of Solutions under Error in Stochastic Linear Programming.* În „Metrika", vol. 9. Fasc. 1, 1965, pp. 47—59.
43. Sengupta, J. K., Tintner, G., Millham C., *On some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications.* În „Management Science" vol. 10, nr. 1, 1963, pp. 143—159.
44. Sengupta, J. K., *The Stability of Truncated Solutions of Stochastic Linear Programming.* În „Econometrica" vol. 34, nr. 1, 1955, pp. 77—104.
45. Talack, R., *On Stochastic Linear Inequalities.* În „Trabajos Estadistica", nr. 10, 1959, pp. 89—112.
46. Tintner, G., *Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics.* Second Symposium in Linear Programming, vol. 1, National Bureau of Standards, Washington, D. C. 1955, pp. 197—227.
47. Tintner, G., *Les programmés linéaires stochastiques.* În „Revue d'Economie Politique", 67 (1957), pp. 208—215.
48. Tintner, G., *A note on Stochastic Linear Programming.* În „Econometrica" vol. 28, nr. 2, 1960, pp. 490—495.
49. Vajda, S., *Mathematical Programming,* Addison Wesley, London, 1961.
50. Vajda, S., *Inequalities in Stochastic Linear Programming.* În „Bulletin de l'Institut International de Statistique", Tome 36, Actes de la 30-ème session de l'Institut de Statistique, Stockholm, 1958, pp. 337—363.
51. Wagner, H. M., *On the Distribution of Solutions in Linear Programming Problems.* În „Journal of the American Statistics Association" vol. 53 (1958).
52. Williams, A., *On Stochastic Linear Programming.* În „Journal Society Industrial Applied Mathematics" vol. 13, 1965, pp. 927—940.

CAPITOLUL II

1. Bereanu, B., *Unele aplicații ale programării stochastice în planificare.* În „Studii de Statistică", Lucrările celei de a doua Consfătuiri științifice de Statistică, 1962, pp. 95—108.
2. Bereanu, B., *Problema stochastică a transportului I. Cazul costurilor aleatoare.* În „Comunicările Academiei R.P.R.", 1963, Tom XIII, nr. 4, pp. 325—332.
3. Bereanu, B., *Problema stochastică a transportului II. Cazul consumurilor aleatoare.* În „Comunicările Academiei R.P.R.," 1963, Tom XIII, nr. 4, pp. 333—338.
4. Bereanu, B., *On Stochastic Linear Programming. The Laplace Transform of the Distribution of the Optimum and Applications.* În „Journal of Mathematical Analysis and Applications", Academic Press, New-York and London, vol. 15. nr. 2, 1966, pp. 280—294.
5. Dantzig, G. B., *Linear Programming under Uncertainty.* În „Management Science", vol. 2, nr. 1, 1955, pp. 197—206.
6. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions,* Princeton University New York, 1963, cap. 15, 18, 28.
7. Dantzig, G. B., *General Convex Objectiv Forms, Mathematical Methods in Social Science,* Ed. Arow, Karlin, Suppes. Stanford University, 1960, pp. 151—158.
8. Dantzig, G. B., Ferguson A. R., *The Allocation of Aircraft to Routes.* În „Management Science", vol. 3, nr. 1, 1956, pp. 45—73.
9. Dantzig, G. B., Wolfe, Ph., *The Decomposition Algorithm for Linear Programming.* În „Econometrica", vol. 29, 1961, pp. 761—778.

Scanned with OKEN Scanner

10. Dantzig, G. B., *Recent Advances in Linear Programming.* În „Management Science", vol. 3, nr. 2, 1956, pp. 131—144.
11. Garvin, W., *Introduction to Linear Programming,* McGraw-Hill Book, New York, 1960, cap. 12.
12. Mihoc, Gh. şi Năde jde, I., *Programarea parametrică şi neliniară,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.
13. Shetty, C. M., *A Solution to the Ttransportation Problem with Nonlinear Costs.* În „Operations Research", vol. 7, nr. 5, 1959, pp. 571—581.
14. Williams, A. C., *A stochastic Transportation Problems.* În „Operations Research", vol. 11, nr. 5, 1963.
15. Williams, A. C., *A Tratement of Transportation problem by Decomposition.* În „Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics". Philadelphia, vol. 10, nr. 1, 1962, pp. 35—48.

CAPITOLUL III

1. De Cani, John S., *A dynamic Programming for Embadded Markov Chains when the Planning Horizon is at Infinity.* În „Management Science", vol. X, nr. 4, 1964.
2. Ciucu, G., Theodorescu, R., *Procese cu legături complete,* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1960.
3. Hatori, Hirohisa, *On Markov Chains with rewards.* În „Kódai mathematical seminar reports", vol. 18, nr. 2, 1966.
4. Howard, R. A., *Dynamic Programming and Markov Processes,* Technology Press & Willey, 1960.
5. Mihoc, G., *Sur l'application de la méthode de Monte Carlo aux processus pour apprendre.* În „Revue de mathématique pures et appliquées," Tome VIII, nr. 3, 1963.
6. Mihoc, G., *La loi limite pour les sommes des variables d'une chaîne à liaisons complètes,* stationnaire et multiple. În „Revues des mathématiques pures et appliquées", Tome VIII, nr. 2, 1963.
7. Mihoc, G., Ciucu G., *Asupra unor proprietăţi de limită din teoria lanţurilor cu legături complete.* În „Analele Universităţii Bucureşti", Anul X, 1961.
8. Mihoc, G., *Teorema ergodică pentru lanţurile cu legături complete multiple.* În „Analele Universităţii Bucureşti", Anul XI, 1962.
9. Onicescu, O., Mihoc, G., *Les chaînes de variables aléatoires,* Problèmes assymptotiques, Acad. Roumaine, Etudes et recherches, 1943.
10. Onicescu, O., Mihoc, G., *Sur les chaînes de variables statistiques.* În „Bull. Soc. Math.", vol. 59, (1935).

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

PREFAȚĂ 5

CAPITOLUL I

PROGRAME STOCHASTICE

§ 1. CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE UNUI SISTEM DE INECUAȚII LINIARE . 9
§ 2. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE CU ELEMENT ALEATOR VECTORUL c 21
§ 3. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE CU VECTORII b ȘI c ALEATORI 70
§ 4. TEOREME DE CONVEXITATE 88
§ 5. INEGALITĂȚI ÎN PROBLEME DE PROGRAMARE STOCHASTICĂ 97
§ 6. PROGRAME LINIARE CU RESTRICȚII ALEATOARE 133
§ 7. PROGRAME LINIARE STOCHASTICE ÎN CARE TOȚI COEFICIENȚII SÎNT ALEATORI 181

CAPITOLUL II

TRANSPORTURI STOCHASTICE

§ 1. PROBLEME DE TRANSPORT CU COSTURI ALEATOARE 221
§ 2. TRANSPORTURI CU CERERI ALEATOARE 235

CAPITOLUL III

PROGRAMARE ÎN LANȚURI MARCOV

§ 1. LANȚURI MARCOV FINITE ȘI OMOGENE 312
§ 2. PROGRAMARE DINAMICĂ CU SUCCESIUNE MARCOVIANĂ 332
§ 3. LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE FINITE ȘI OMOGENE 358
§ 4. PROGRAMAREA DINAMICĂ CU SUCCESIUNE ÎN LANȚ CU LEGĂTURI COMPLETE 385

BIBLIOGRAFIE 403

Scanned with OKEN Scanner

Redactor resp. de carte: DORINA BĂDILĂ
Tehnoredactor: Victoria Stănculescu

Dat la cules 24. 06. 1967. Bun de tipar 15. 01. 1968. Tiraj 2800+140 ex. Hîrtie scris II A 63 g/m². Format 61×86/16. Coli editoriale 18,55. Coli tipar 25,50. A. 9891. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari 51:33, pentru bibliotecile mici 51:33.

Tiparul executat sub comanda nr. 494/1967,
la Întreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7,
Cluj — Republica Socialistă România.

Scanned with OKEN Scanner